Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края
"Каневской аграрно-технологический колледж" (ГАПОУ КККАТК)

Рассмотрены
на заседании УМО «Проектно-исследовательская деятельность»

Олифиренко Н. А

« 29» августа 2022 г.

Согласован:
Старший методист

Н.А.Королёва

« 29» августа 2022 г.

Методические рекомендации для обучающихся

по выполнению практических занятий

по учебной дисциплине: ОДП.9 Математика по специальности среднего профессионального образования

35.02.08 Электрификация и автоматизация сельского хозяйства

Методические рекомендации для обучающихся по выполнению практических и лабораторных занятий по дисциплине составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, рабочим учебным планом, рабочей программой и календарно-тематическим планом учебной дисциплины: ОДП.9 Математика по специальности среднего профессионального образования 35.02.08 Электрификация и автоматизация сельского хозяйства (базовая подготовка, очная форма обучения)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплины;

Задачи:

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Методические рекомендации для обучающихся по выполнению практических занятий разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта, рабочей программы учебной дисциплины ОДП. 9 Математика по специальности среднего профессионального образования 35.02.08 Электрификация и автоматизация сельского хозяйства(базовая подготовка, очная форма обучения).

Организация-разработчик: ГАПОУ КК «Каневской аграрно-технологический колледж»

Разработчик: Мацко С.И. - преподаватель высшей квалификационной категории ГАПОУ КККАТК

Рекомендовано УМО «Проектно-исследовательская деятельность» ГАПОУ КККАТК Протокол №1__от« 29» августа 2022 г.

№ занятия	Тема	Количество часов
1.	**ПЗ№1** Арифметические действия над числами	1
2.	**ПЗ№2** Нахождение приближенных значении величин и погрешностей вычислений, сравнение числовых выражений	1
3.	**ПЗ№3** Вычисление и сравнение корней	1
4.	**ПЗ№4** Выполнение расчетов с радикалами. Решение иррациональных уравнений	1
5.	**ПЗ№5** Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней	1
6.	**ПЗ№6** Преобразования выражений, содержавших степени. Решение показательных уравнений. Решение прикладных задач	**1**
7.	**ПЗ№7** Логарифмирование и потенцирование выражений. Приближенные вычисления и решения прикладных задач.	1
8.	**ПЗ№8** Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому.	1
9.	**ПЗ№9** Вычисление и сравнение логарифмов	1
10.	**ПЗ№10** Контрольная работа №1 по теме: «Корни, степени, логарифмы	1
11.	**ПЗ№11** Признаки взаимного расположения прямых. Угол между прямыми.	1
12.	**ПЗ№12** Взаимное расположение прямых и плоскостей	1
13.	**ПЗ№13** Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью.	1
14.	**ПЗ№14** Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах	1

15.	**ПЗ№15** Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей	1
16.	**ПЗ№16** Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями.	1
17.	**ПЗ№17** История развития комбинаторики, теории вероятностей и статистики.	1
18.	**ПЗ№18** Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач	1
19.	**ПЗ№19** Размещения, сочетания и перестановки.	1
20.	**ПЗ№20** Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Прикладные задачи.	1
21.	**ПЗ№21** Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве.	1
22.	**ПЗ№22** Уравнение окружности, сферы, плоскости.	1
23.	**ПЗ№23** Расстояние между точками	1
24.	**ПЗ№24** Действия с векторами, заданными координатами. Скалярное произведение векторов	1
25.	**ПЗ№25** Векторное уравнение прямой и плоскости. Использование векторов при доказательстве теорем стереометрии	1
26.	**ПЗ№26** Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.	1
27.	**ПЗ№27** Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения.	1
28.	**ПЗ№28** Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.	1
29.	**ПЗ№29** Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс.	1
30.	**ПЗ№30** Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.	1
31.	**ПЗ№31** Контрольная работа №2 по теме « Основы тригонометрии»	1
32.	**ПЗ№32** №32 Примеры зависимостей между переменными в реальных процессах из смежных дисциплин. Определение функций. Построение и чтение графиков функций	1

33.	**ПЗ№33** №33 Исследование функции. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций. Непрерывные и периодические функции	1
34.	**ПЗ№34** Свойства и график и синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции	1
35.	**ПЗ№35** Преобразования графика функций. Гармонические колебания. Прикладные задачи.	1
36.	**ПЗ№36** Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения.	1
37.	**ПЗ№37** Параллельное проектирование и его свойства. Взаимное расположение пространственных фигур	1
38.	**ПЗ№38** Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения развертки многогранников	1
39.	**ПЗ№39** Площадь поверхности многогранников	1
40.	**ПЗ№40** Виды симметрий в пространстве	1
41.	**ПЗ№41** Симметрия тел вращения и многогранников	1
42.	**ПЗ№42** Вычисление площадей и объемов	1
43.	**ПЗ№43** Числовая последовательность, способы её задания, вычисление членов последовательности.	1
44.	**ПЗ№44** Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.	1
45.	**ПЗ№45** Производная: механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной в общем виде.	1
46.	**ПЗ№46** Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций.	1
47.	**ПЗ№47** Исследование функций с помощью производной.	1
48.	**ПЗ№48** Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функций.	1
49.	**ПЗ№49** Контрольная работа №3 по теме: « Начала математического анализа»	1

50.	**ПЗ№50** Интеграл и первообразная	1
51.	**ПЗ№51** Теорема Ньютона-Лейбница	1
52.	**ПЗ№52** Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей	1
53.	**ПЗ№53** Классическое определение вероятности, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей.	1
54.	**ПЗ№54** Вычисление вероятностей. Прикладные задачи.	1
55.	**ПЗ№55** Представление числовых данных. Прикладные задачи.	1
56.	**ПЗ№56** Корни уравнений. Равносильность уравнений.	1
57.	**ПЗ№57** Преобразование уравнений. Основные приемы решения уравнений и неравенств	1
58.	**ПЗ№58** Решение систем уравнений.	1
59.	**ПЗ№59** Использование свойств и графиков функций для решений и неравенств.	1

Пояснительная записка

Всесторонняя подготовка специалистов – это не только приобретение знаний, но и выработка умений применять знания на практике и в жизни. Особенно важными являются умения по специальностям. Однако специалист был бы беспомощным в отрасли своей деятельности, если бы не знал практики, или иными словами, не видел путей практического приложения научных знаний, не обладал собственными умениями и навыками.

Целями привития умений и навыков служат практические занятия.

Задачами практических занятий являются:
в рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются умения и знания: ОК 01- ОК 9, ЛР, 4 ЛР 6, ЛР 8; ЛР 10;

расширение, углубление и детализация научных знаний, полученных на лекциях. практические занятия логически продолжают лекции;
повышение уровня усвоения учебного материала;
привитие умений и навыков;
развитие научного мышления и речи студентов;
проверка и учет знаний. Все формы практических занятий являются важным средством более действенной проверкой знаний, оперативной обратной связи, осуществляемой по формуле «студент-преподаватель»;
развитие научного кругозора и общей культуры;
развитие познавательной активности;
привитие навыков ведения коллективной беседы, участие в творческой дискуссии.

Все эти задачи должны быть направлены на достижение конечной цели – всестороннего развития личности будущего специалиста.

Методические рекомендации для выполнения практических занятий

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение ситуативных задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения ситуативных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

Подготовка к практическим занятиям

Основой для подготовки студентов ко всем видам практических занятий являются разрабатываемые планы занятий. В них перечисляются вопросы для изучения, приводится перечень основной и дополнительной литературы, а также называются методические пособия, призванные оказывать помощь студентам в организации самостоятельной работы по данной теме.

Успех каждого практического занятия зависит от того, насколько активно и самостоятельно в нем участвуют студенты. Однако характер их участия в различных видах самостоятельных занятий различен. Он зависит от специфики самих занятий.

Одним из видов практических занятий, являются практические работы. Практические работы проводятся для формирования умений и навыков и направлены на обучение конкретной деятельности. В ходе практических работ студенты овладевают умениями работать с нормативными документами, справочниками, составляют чертежи, схемы, таблицы, техническую документацию и решают задачи (в соответствии с содержанием общеобразовательных общепрофессиональных и специальных дисциплин).

К каждой практической работе разрабатываются инструкции. Инструкции содержат методические рекомендации, а также конкретные практические задания. Расчеты студенты проводят по вариантам, что обеспечивает их самостоятельность в работе и позволяет преподавателю выявлять отстающих, проводить с ними индивидуальную работу.

Преподаватель осуществляет контроль за работой каждого студента, помогает тем из них, кто в этом нуждается, дает индивидуальные консультации.

В результате самостоятельного поэтапного решения предложенных заданий, студенты получают достаточно полное представление о практическом использовании изученного лекционного материала.

Практические работы студенты оформляют в отдельных тетрадях, пастой синего цвета.

Критерии оценивания практических работ

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
86-100	5	отлично
66-85	4	хорошо
50-65	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

Критерии оценки.

За правильный ответ на каждое задание ставится 1 балл, неверный ответ или отсутствует ответ, ставится 0 баллов.

«5» - 86-100%

«4» - 66-85%

«3» -50-65%

«2» - менее 50%

Практическое занятие № 1

Тема: Арифметическое действия над числами

Цель: Отработать навыки преобразования выражений, используя формулы сокращенного умножения, разложения многочлена на множители, а также навыки решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.

Методические рекомендации

Решение квадратных уравнений:

$\boldsymbol{a \cdot x^2 + bx + c = 0}$

$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$,

Если $D > 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Если $D = 0$, то $x = \dfrac{-b}{2a}$

Если $D < 0$, то корней нет

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Сократите дробь: а) $\dfrac{x^2-4}{x+2}$; б) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

2. Упростите выражение: $\dfrac{x^2-4x}{y}\cdot\dfrac{2xy}{x^2-16}$

3. Решите уравнения:

а) $2x-3=5-2x$; б) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3x-2}{4}=3$

4. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=1\\x+y=2\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-y=3\\2x-3y=4\end{cases}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2-2x-1=0$; б) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}=4$

6. Решите неравенство: $2x-3\le 3-x$

7. Решите систему неравенств:

$\begin{cases}2x+2\le x+4\\x+5\ge 2x-1\end{cases}$

8. Решите неравенство: $x^2-5x+4\ge 0$

2 вариант

1. Сократите дробь: а) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$; б) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

2. Упростите выражение: $\dfrac{x^2-x}{2y}\cdot\dfrac{y}{x-1}$

3. Решите уравнения:

а) $2x+1=3-x$; б) $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}=2$

4. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases}2x+2y=4\\x-y=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+\dfrac{1}{3}y=1\\2x+y=4\end{cases}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2+x-4=0$; б) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{x}=5$

6. Решите неравенство: $2x+1\ge x-2$

7. решите систему неравенств:

$\begin{cases}x-1\le 3x+2\\2x-4\le x\end{cases}$

8. Решите неравенство: $x^2+2x-3\le 0$

Практическое занятие №2

Тема: Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений.

Цель: Сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Краткий теоретический материал

Определение. Абсолютной погрешностью приближения называется модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.

Δ = , где Δ – абсолютная погрешность, x – приближенное значение некоторой величины (например, полученное путём однократного измерения этой величины), a – ее точное значение величины,

Δ = a - x= Δ a = x Δ

Пример 1

Найти абсолютную погрешность приближения 0,44 числа 4/9.

Δ = =

На практике во многих случаях точное значение бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность найти нельзя. Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Определение. Границей абсолютной погрешности Δ приближения называется такое положительное число h больше которого абсолютная погрешность быть не может.

Δ = h

Пример 2

< 0,0045

x - Δ – Нижняя граница (Н.Г.) x + Δ – Верхняя граница (В.Г.)

Приближенные числа, как и точные записываются как правило при помощи десятичных дробей. Но если в записи точного числа все его цифры верные, то в приближенном некоторые его цифры верные, а другие являются сомнительными.

Определение. Цифра называется верной (точно значащей), если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда в котором записана эта цифра. В противном случае она называется сомнительной.

Пример 3

x = 3,7412 0,002 Определить верные и сомнительные цифры.

В.Г. = 3,7412 + 0,002 = 3,7432

Н.Г. = 3,7412 - 0,002 = 3,7392

Верные – 3 и 7, сомнительные 4,1 и 2.

Замечания

В записи приближенного числа сохраняются только верные цифры. x = 3,7

Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то они остаются в записи числа.

x = 0,301 0,001

В.Г. = 0,302 Н.Г. = 0, 300 x = 0,30

В десятичной записи числа значащими цифрами называются все его верные цифры, начиная с первой слева отличной от нуля.

0, 583; 38,57; 38,507; 29,830

Правило округления чисел: Если первая слева отбрасываемая цифра меньше 5, то округляют с недостатком, если это цифра 5 или больше, то округляют с избытком.

Пример 4

5,739 (с точностью до 0,01) 5,74

3, 53 (с точностью до целых) 4
30253 (с точностью до 1000) 30000
Но абсолютной погрешности не достаточно для полной характеристики приближения. Если измерять расстояние между двумя городами, которое равно 100 км, с точность до 1 м, то это будет точное измерение, а если с точность до 1м измерена длина участка земли, которая равна 10м, то это грубое измерение.
Определение. Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению измеряемой величины. Обычно выражается в процентах.
ω = ; ω% = либо
Т.о. для более полной оценки точности измерений необходимо определить, какую часть, или сколько процентов, составляет абсолютная погрешность от значения данной величины.
Пример 5
Сравнить точность двух измерений.
d = 4 0,3; H = 600 0,3
ω(d) =
ω(H) =
Второе измерение более точное.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Найти абсолютную погрешность приближения 0,55 числа 5/8
2. x = 4,7452 0,003 Определить верные и сомнительные цифры
3. Сравнить точность двух измерений:
   d = 5 0,3; H = 500 0,3

Вариант 2

1. Найти абсолютную погрешность приближения 0,77 числа 7/9
2. x = 5,7462 0,002 Определить верные и сомнительные цифры
3. Сравнить точность двух измерений:
   d = 4 0,2; H = 700 0,2

Контрольные вопросы:
Дайте определение абсолютной погрешности приближения.
Дайте определение относительной погрешности приближения.
Какая цифра называется верной (точно значащей), а какая цифра - сомнительной?
Форма отчета: выполнение заданий в тетради для практических работ.
Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие №3

Тема: Вычисление и сравнение корней.

Цель: Применить умения по выполнению расчетов с радикалами.

Пояснения к работе (учебный материал):

Степень с натуральным показателем

Пусть a - действительное число, а n - натуральное число, больше единицы. n - *й степенью числа* a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$.

Справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

Если $a > 0$,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0.$$

По определению: если $a \neq 0$, то

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Арифметический корень

Если $a \geq 0$, n - натуральное число, больше единицы, то существует, и только одно, неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число называется арифметическим корнем n - й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то справедливы следующие свойства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0,$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},$$

$$\sqrt[nk]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Полагают по определению: если $a \geq 0,\ m, n$ - натуральные числа, $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла.
Полезно знать свойства

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,$$

$$\left(\sqrt{a^2}\right) = |a|.$$

Для рациональных показателей свойства степеней остаются теми же.

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3\cdot2]{8^2} = \sqrt[6]{64}.$$

2. Величина корня не изменится, если показатель степени уменьшить в n раз и одновременно извлечь корень n-й степени из подкоренного количества:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m:n]{\sqrt[n]{a}}$$

Пример 2.

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6:3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$$

Замечание. Это свойство останется в силе и в том случае, когда число m/n не будет целым; точно так же оба вышеуказанных свойства сохранят силу и для n дробного. Но для этого нужно сначала расширить понятие степени и корня, введя дробные показатели.
3. Корень из произведения нескольких сомножителей равен произведению корней той же степени из этих сомножителей:

$$\sqrt[m]{abc\ldots} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c\ldots}$$

Пример 3.

$$\sqrt[3]{a^6b^2} = \sqrt[3]{a^6}\ \sqrt[3]{b^2} = a^2\ \sqrt[3]{b^2}$$

Последнее преобразование основывается на свойстве 2.

Пример 4.

$$\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot3} = \sqrt{16}\ \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Обратно, произведение корней одной и той же степени равно корню той же степени из произведения подкоренных количеств:

$$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c}\ldots=\sqrt[m]{abc\ldots}$$

Пример 5.

$$\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt{ab^3}=\sqrt{a^4b^4}=a^2b^2$$

4. Корень от частного равен частному от деления корня из делимого на корень из делителя (показатели корней разумеются одинаковыми):

$$\sqrt[m]{a:b}=\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}$$

Обратно: $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a:b}$

Пример 6.

$$\sqrt[3]{27:4}=\sqrt[3]{27}:\sqrt[3]{4}=3:\sqrt[3]{4}$$

5. Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное количество:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}$$

Обратно, чтобы извлечь корень из степени, достаточна, возвести в эту степень корень из основания степени:

$$\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Пример 7.

$$\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=\sqrt[3]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^3\cdot ab^2}=a\sqrt[3]{ab^2}$$

.

$$\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\left(\sqrt{3}\right)^3$$

<u>Задание:</u>

Вариант I	Вариант II
№1. Вычислить: $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{9}$	№1. Вычислить: $\sqrt[3]{2^6\cdot 0{,}5^3}$
№2. Вычислить: $-2\sqrt[4]{16}$	№2. Вычислить $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$
№3. Вычислить: $\sqrt[3]{0{,}2^3\cdot 5^6}$	№3. Вычислить: $-6\sqrt[3]{8}$

№4. Решить уравнение: $x^6=64$

№5. Вычислить:

$\sqrt[4]{8\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 27}=$

№6. Преобразовать выражение:

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=$

№7. Найти значение выражения:

$\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$

№8Вычислить значения выражений:

А) $\dfrac{26^9}{13^8\cdot 8^3}$

Б) $\left(\left(6^{4/3}\right)^{3/2}+\left(0,25\right)^{-1}\right)\cdot\left(-0,5\right)^3$

№9 Вычислить без помощи микрокалькулятора:

А) $\sqrt[4]{15\dfrac{5}{8}}:\sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}$

Б) $\sqrt[3]{\dfrac{23}{64}+\sqrt{\dfrac{5}{48^2-32^2}}}$

№4. Решить уравнение: $x^5=32$

№5. Вычислить:

$\sqrt[5]{32\cdot 7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}$

№6. Преобразовать выражение:

$\sqrt[6]{2\cdot\sqrt[5]{2}}$

№7.Найти значение выражения:

$\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$

№8Вычислить значения выражений:

А) $\dfrac{12^9}{2^{15}\cdot 3^7}$

Б) $\left(\left(5^{8/7}\right)^{7/4}-\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3}}{32}\right)\cdot\left(46\right)^{-1}$

№9 Вычислить без помощи микрокалькулятора:

А) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\dfrac{3}{4}}$

Б) $\sqrt{\dfrac{9}{16}\sqrt{\dfrac{33^2-25^2}{29}}}$

Практическое занятие №4

Тема: Выполнение расчетов с радикалами. Решение иррациональных уравнений.

Цель: Обеспечение качества усвоения учащимися образовательного стандарта по теме «Решение иррациональных уравнений».

Справочная информация:

- Квадрат суммы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Квадрат разности: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Разность квадратов: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Куб суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Куб разности: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Свойства корня n-ой степени

(для $n \in N,\ k \in N,\ n > 1,\ k > 1$)

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$, где $a \ge 0,\ b \ge 0$

2° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \ge 0,\ b > 0$

3° $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \ge 0$

4° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, где $a \ge 0$

5° $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \ge 0$

6° $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n - \text{четно} \\ a, & n - \text{нечетно} \end{cases}$

7° $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, n – нечетно

8° $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \ge 0$

Алгоритм решения уравнений

1. Определить показатель корня.

2. Возведем уравнение в степень обе части уравнения, равную показателю корня.

3. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней.

Решим уравнения: а) $\sqrt{x+2} = x$.

1. Показатель корня равен n = 2

2. Возведем обе части уравнения в квадрат:

x + 2= x2,

x2 – x - 2=0, D = b2-4ac = (-1)2 – 4 1 (-2) = 9, D>0, 2 корня

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

x1= -1, x2=2.

Поэтому выполняем проверку, путем подстановки в первоначальный вид уравнения	3. x1= -1 x2=2. $\sqrt{(-1)+2}$ = -1 $\sqrt{2+2}$ = 2. $\sqrt{1}$ = -1 – не верно $\sqrt{4}$ = 2 – верно Ответ: x2=2.

Примеры для закрепления

1. $\sqrt{8-\frac{x}{4}}=6$
2. $\sqrt[3]{35-x^2}=2$
3. $\sqrt{19-x^2}=3$
4. $\sqrt[3]{x^2+4x+6}=3$
5. $\sqrt[4]{246+23x+5x^2}=4$
6. $\sqrt[4]{102-52x+7x^2}=3$
7. $\sqrt[4]{64x^2+32x+85}=3$
8. $\sqrt[4]{49x^2-14x+257}=4$
9. $\sqrt[3]{7x^3+36x^2+63x+27}=2x+3$
10. $\sqrt[3]{9x^3-36x^2+53x-27}=2x-3$
11. $\sqrt[3]{9x+1}=3x+1$
12. $\sqrt[3]{7-2x}=4x+8$
13. $\sqrt{6-14x+9x^2}=2x-1$
14. $\sqrt{-23+6x+6x^2}=3x-2$
15. $\sqrt{5x+1}=\sqrt{7x-9}$
16. $\sqrt[3]{4x-7}=\sqrt[3]{3x-4}$
17. $\sqrt{6x^2-3x-1}=\sqrt{2x-1}$
18. $\sqrt{7x^2+x-2}=\sqrt{7x-2}$
19. $(7x-4)\sqrt{8+3x}=0$
20. $(3x+5)\sqrt{7+3x}=0$
21. $(x^2+8x+15)\sqrt[3]{4x-7}=0$

Практическое занятие №5

Тема: Нахождение степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней.

Цель: Научиться вычислять степени с рациональными показателями.

Свойства степеней

Пример.

Корень -й степени из числа — это число, -я степень которого равна .

Если — чётно.

- Тогда, если a < 0 корень n-ой степени из a не определен.
- Или если a ≥ 0, то неотрицательный корень уравнения называется арифметическим корнем n-ой степени из a и обозначается

1 вариант.

А1. Вычислите $\sqrt[5]{243}$.

1) *2*; 2) *3*; 3) *9*; 4) $\sqrt[5]{3}$.

А2. Вычислите $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[3]{-2}$.

1) *2*; 2) *4*; 3) −*2*; 4) −*4*.

А3. Упростите выражение $(\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}})^3$.

1) $\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) *a*; 4) $\sqrt[4]{a}$.

А4. Вычислите $\sqrt[4]{0,5} \cdot \sqrt[4]{0,125}$.

1) *0,25*; 2) *0,5*; 3) *0,15*; 4) *5*.

А5. Найдите значения выражения $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4} + \frac{4\sqrt{y}}{y-16}$ при y = 18.

1) $9(4+3\sqrt{2})$; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) $4+3\sqrt{2}$; 4) *9*.

А.6. Упростите выражение $\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1} - 2\sqrt[8]{x}$

1) $(\sqrt[4]{x}-1)^2$; 2) $1-2\sqrt[8]{x}$; 3) $1-\sqrt[8]{x}$; 4) $(\sqrt[8]{x}-1)^2$.

А7. Найдите значение выражения: $6 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$.

1) *12*; 2) *6*; 3) *3*; 4) –*3*.

А8. Найдите значение выражения: $\left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

1) $\frac{5}{6}$; 2) $1,2$; 3) $\frac{36}{125}$; 4) $\frac{6}{25}$.

A9. Найдите значение выражения: $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}$.

1) -4; 2) 9; 3) -5; 4) 5.

A10. Сократите дробь: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$

1) a; 2) $\frac{a}{a+1}$; 3) $\frac{a+1}{a}$; 4) $a+1$.

<u>2 вариант.</u>

A1. Вычислите $\sqrt[4]{625}$.

1) 5; 2) 4; 3) 25; 4) $\sqrt[4]{5}$.

A2. Вычислите $\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{-4}$.

1) 2; 2) 4; 3) -2; 4) -4.

A3. Упростите выражение $(\sqrt[8]{a\sqrt[3]{a}})^3$.

1) $\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) a; 4) $\sqrt[4]{a}$.

A4. Вычислите $\sqrt[4]{0,3}\cdot\sqrt[4]{0,027}$.

1) $0,09$; 2) $0,03$; 3) $0,3$; 4) 3.

A5. Найдите значения выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right) : \sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a = 4,\ b = 5$.

1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) 0; 4) $2\sqrt{5}$.

A.6. Упростите выражение $\left(\dfrac{1-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1)} - \sqrt[8]{x}\right) \div \dfrac{1}{\sqrt[8]{x}}$.

1) $(\sqrt[4]{x}-1)^2$; 2) $1-2\sqrt[4]{x}$; 3) $1-\sqrt[4]{x}$; 4) $(\sqrt[8]{x}-1)^2$.

A7. Найдите значение выражения: $15\cdot 27^{-\frac{1}{3}}$.

1) 45; 2) 5; 3) 3; 4) -45.

A8. Найдите значение выражения: $\left(\frac{121^4}{625^2}\right)^{\frac{1}{8}}$.

1) *5,5*; 2) *2;* 3) $\frac{11}{25}$; 4) $\frac{121}{25}$.

A9. Найдите значение выражения: $\left(5^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{15}.$

1) ‾*4*; 2) *25*; 3) ‾*9*; 4) *16*.

A10. Найдите значение выражения $\frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}+5} + \frac{5p^{\frac{1}{2}}}{p-25}$ при $p = 49$.

1) *49*; 2) $\frac{49}{12}$; 3) $\frac{49}{24}$; 4) 7.

Практическое занятие № 6

Тема: Преобразования выражений, содержавших степени. Решение показательных уравнений. Решение прикладных задач

Цель: Отработать навыки решения показательных уравнений, неравенств, систем уравнений.

Методические рекомендации

1. Показательные уравнения.

Определение. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

1. $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ - простейшее показательное уравнение
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a \neq 1$, $a > 0$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$
3. $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$ решается подстановкой $a^x = y$ и сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$

II. Показательные неравенства.

Определение. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

$$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

При $\underline{a > 1}$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) < g(x)$

при $\underline{0 < a < 1}$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) > g(x)$

III. Основные показательные тождества.

2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
3. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$
4. $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

6. если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$
7. если $a > 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$
8. если $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$
9. если $a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$
10. если $a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$

$$a^0 = 1; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Варианты заданий практической работы

Работа состоит из двух частей. Выполнение первой части работы (до черты) позволяет получить оценку «3». Для получения оценки «4» необходимо верно решить первую часть работы и одну из задач второй части (за чертой). Чтобы получить оценку «5», помимо выполнения первой части работы, необходимо решить не менее двух любых заданий из второй части.

1 вариант

2 вариант

1. Решить уравнение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$; б) $4^x + 2^x - 20 = 0$

2. Решить неравенство: $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases}$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt{5}\right)^{x-6} < \frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1$

5. Решить уравнение:

$7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$

6. Решите уравнение: $4 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 4^{2x} = 9 \cdot 20^x$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

1. Решите уравнение:

а) $(0{,}1)^{2x-3} = 10$; б) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

2. Решите неравенство: $\left(\frac{6}{5}\right)^x > \frac{5}{6}$

3. Решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = -2 \\ 6^{x+5y} = 36 \end{cases}$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x+6} > \frac{1}{9}$; б) $\left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4} \leq 1$

5. Решить уравнение:

$3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^x$

6. Решите уравнение:

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 6^x$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

3 вариант

1. Решить уравнение:

а) $2^{1-x} = 8$; б) $25^x - 5^x = 20$

2. Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

3. Решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^x + 4^y = 5 \end{cases}$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2} < \frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-9} \geq 1$

5. Решить уравнение: $5^{2x} - 4^{x+1} = 4^x + 5^{2x-1}$

6. Решите уравнение:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

4 вариант

1. Решить уравнение:

а) $8^x = 4^{x-1}$; б) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$

2. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{64}\right)^x \geq \sqrt{\frac{1}{8}}$

3. Решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{x-3} > \frac{1}{49}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} \leq 1$

5. Решить уравнение: $4^x + 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^{x+2}$

6. Решите уравнение:

$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 5^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

Практическое занятие № 7

Тема: Логарифмирование и потенцирование выражений. Решение логарифмических уравнений.

Цель: Отработать навыки решения логарифмических уравнений, неравенств.

Методический материал

1. Логарифмом числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

2. Логарифмирование – это нахождение логарифмов заданных чисел или выражений.

3. Потенцирование – это нахождение чисел или выражений по данному логарифму числа.

4. Свойства логарифмов:

$\log_a b$ - логарифм числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)

$\lg b$ - десятичный логарифм (логарифм по основанию 10, a = 10).

$\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$

$\log_a 1 = 0$ - логарифма единицы

$a^{\log_a b}=b$

$\log_a a = 1$ - логарифм числа, равного основанию

$\log_a x = \log_b x / \log_b a$ - формула перехода к новому основанию

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

$\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$

$\log_a x = 1$, $a>0$, $a\neq 1$

$\log_a(bc) = \log_a b+\log_a c$

Варианты заданий практической работы

Вариант 1 Вариант 2

1.Прологарифмировать 1.Прологарифмировать по основанию 10 по основанию 10

а) $x = 3a^7$ а) $x = 15a^3b^3c^7$ б) $x = a^2\,\sqrt[7]{ab^5}$ б) $x = a\,\sqrt[3]{ab^2}$

2. Найдите корень уравнения 2. Найдите корень уравнения

а) $\log_5(5-x) = \log_5 3$ а) $\log_2(15+x) = \log_2 3$

б) $\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1$ б) $\log_4(x+3) = \log_4(4x-15)$

в) $\log_{x-5}49 = 2$ в) $\log_8 2^{8x-4} = 4$

г) $\log_x 32 = 5$ г) $\log_x 30 = 6$

3. Решите уравнение: 3. Решите уравнение:

а) $\log_4(2x + 3) = 3$ а) $\log_5(2x-1) = 2$

б) $\log_5(4+x) = 2$ б) $\log_2(4-x) = 7$

Практическое занятие № 8

Тема: Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому.

Цель: Отработать навыки решения логарифмических выражений .

Методический материал

Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* — называется показатель степени, в которую надо возвести *a*, чтобы получить *b*.png, где b > 0, a > 0, a≠ 1.

Примеры

$\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$
$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$
$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Десятичный логарифм — логарифм с основанием 10, который обозначается как:

$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$

Свойство логарифмов.

При a > 0, b > 0, a≠1, b≠1, c>0, c≠1

В1	В2
1.Вычислить:	1. Вычислить:
а)$\log_6 2 + \log_6 3$	а)$\log_4 2 + \log_9 3$
б)$\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$	б)$\log_5 10 + \log_5 12 + \log_4 8$
в)$2^{2\log}2^{10}$	в)$3^{2\log}4^{16}$
г)$2^{2 + \log}2^{9}$	г)$2^{3 + \log}2^{10}$
д)$3\lg 2 - \lg 4$	д)$2\lg 3 - 2\lg 4$
2.Решить уравнения:	2. Решить уравнение:
а)$\log_3(5x-1)$	а)$\log_4(10+2x)$

б)$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)$ б)$\log_{0,5}(2x-5)$

в)$\log_2 x-2\log_x 2$ в)$\log_9(3^{5x-1})$

г)$\log_7(5-3x)$ г)$\log_3(2x+1)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: Вычисление и сравнение логарифмов».

Цель: оценить знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала

Практическая часть.

Ответьте на контрольные вопросы:

а) дайте определение логарифма числа.

б) запишите основное логарифмическое тождество.в) перечислите основные свойства логарифмов.

Вариант 1

1.Вычислить: $\log_3 \frac{1}{9} + \log_4 16 + \lg 10$

2. Вычислить: $\log_{0,1} 1000 \cdot \log_{\sqrt{3}} 27 : \log_7 \frac{1}{7}$

$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

3.Вычислить: $\log_{15} 3 + \log_5 5$

$\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 14$

4.Вычисл

ить:

5.Вычисли

ть: $\log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$

6.Вычисли $5^{-2\log_5 10}$

ть: $4^{2+\log_4 7}$

7.Вычисли $0{,}5\log_2 25 + \log_2 1{,}6$

ть: $\log_2 10 - 2\log_2 5 + \log_2 40$

8.Вычисли $9^{\log_3 100}$

ть:

9.Вычисли

ть:

10.Вычисл

ить:

11.Вычисл

ить:

12. Вычислить: $\frac{\log_6 16}{\log_6 2}$

13. Вычислить: $\log_{36} 16 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{36}} 81$

14. Найти число x по данному логарифму:

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{9} + \log_{\frac{1}{3}} 21 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7$$

15. Вычислить: $\log_6 \frac{1}{6\sqrt{216}} \cdot \log_{0,3} \frac{1}{0,09} \cdot \lg 10\sqrt{0,1}$

16. Упростить: $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

Вариант 2

1. Вычислить: $\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{16} 256 + \lg 1000\,0$

2. Вычислить: $\log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_{\sqrt{3}} 9 : \log_4 \frac{1}{4}$

3. Вычислить: $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$

4. Вычислить: $\log_{144} 4 + \log_{144} 3$

5. Вычислить: $\log_3 162 - \log_3 6$

6. Вычислить: $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$

7. Вычислить: $6^{-3\log_6 4}$

8. Вычислить: $5^{2+\log_5 8}$

9.Вычислить: $0{,}5\log_2 400 + \log_2 1{,}6$

10.Вычислить: $2\log_3 6 - \log_3 8 + \log_3 2$

11. Вычислить: $9^{\log_{81} 4}$

12. Вычислить: $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$

13.Вычитслить $\log_5 35 - 2\log_{25} 7$

14. Найти число х по данному логарифму:

$\log_{0,5} x = \log_{0,5} 17 - \log_{0,5} 34 + \log_{0,5} 3$

15. Вычислить: $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{25} : 3^{\log_3 2}$

16. Упростить: $-\log_4 \log_4 \sqrt[4]{\sqrt[4]{4}}$

Вариант 3

1.Вычислить: $\log_{0,1} 100 + \log_7 7 + \lg 0{,}001$

2. Вычислить: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} \cdot \log_7 \sqrt{49} : \log_5 125$

3.Вычислить: $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$

4.Вычислить: $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$

5.Вычислить: $\log_2 36 - \log_2 144$

6.Вычислить: $\log_3 135 - \log_3 20 + \log_3 36$

7.Вычислить: $4^{-2\log_4 7}$

8. Вычислить: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2 + \log_{\left(\frac{1}{5}\right)} 8}$

9. Вычислить: $2\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}$

10. Вычислить: $\log_3 8 - 2\log_3 2 - 2\log_3 \frac{9}{2}$

11. Вычислить: $0{,}04^{\log_{0,2} 3}$

12. Вычислить: $\frac{\log_7 9}{\log_7 27}$

13. Вычислить: $\log_2 24 - 2\log_4 3$

14. Найти число x по данному логарифму:

$$\log_{\frac{1}{5}} x = \log_{\frac{1}{5}} 63 + \log_{\frac{1}{5}} 4 - \log_{\frac{1}{5}} 21$$

15. Вычислить: $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{\sqrt[3]{2}}{8} : 7^{2\log_7 2}$

16. Упростить: $\sqrt{\sqrt[\log_6 4]{16} + \sqrt[\log_8 9]{81}}$

Вариант 4

1. Вычислить: $\log_2 \frac{1}{4} + \log_{11} 121 + \lg 100$

2. Вычислить: $\log_3 81 : \log_{0,5} 2 \cdot \log_5 \sqrt{5}$

3. Вычислить: $\log_2 \log_{\sqrt{7}} 49$

4. Вычислить: $\lg 25 + \log 40$

5. Вычислить: $\log_7 98 - \log_7 14$

6. Вычислить: $\log_2 56 + \log_2 144 - \log_2 63$

7. Вычислить: $9^{3\log_9 2}$

8. Вычислить: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3+\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}5}$

9. Вычислить: $2\log_5 75 + \log_5 \frac{1}{625}$

10. Вычислить: $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$

11. Вычислить: $2^{\log_4 9}$

12. Вычислить: $\frac{\log_3 4}{\log_3 64}$

13. Вычислить: $\log_3 63 - 2\log_9 7$

14. Найти число x по данному логарифму:

$$\log_{\sqrt{15}} x = 4\log_{\sqrt{15}} 2 - \log_{\sqrt{15}} 6 + \log_{\sqrt{15}} 15$$

15. Вычислить: $\log_2 8 : \log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_5 \sqrt[3]{25}$

16. Упростить: $-\log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}$

Вариант 5

1. Вычислить: $\log_{\frac{1}{5}} 125 + \log_7 49 + \lg 0{,}1$

2. Вычислить: $\log_{0,1} 10 \cdot \log_{0,5} \frac{1}{8} : \log_3 \sqrt{9}$

3. Вычислить: $\log_2 \log_{49} 7$

4. Вычислить: $\lg 12{,}5 + \log 8\,0$

5. Вычислить: $\log_3 2 - \log_3 54$

6.Вычислить: $\log_7 1 - \log_7 3{,}5 + \log_7 \frac{49}{4}$

7.Вычислить: $11^{4\log_{11} 2}$

8.Вычислить: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4 + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 6}$

9. Вычислить: $\log_2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_2\frac{4}{3}$

10. $2\log_2 6+\log_2\frac{35}{9}-\log_2 35$

11. Вычислить $2^{\log_8 125}$

12. Вычислить: $\frac{\log_7 27}{\log_7 81}$

13. Вычислить: $\frac{1}{2}\log_2 48-\log_4 3$

14. Найти число x по данному логарифму:

$$\log_{\frac{1}{7}} x=\log_{\frac{1}{7}}\frac{5}{8}+\log_{\frac{1}{7}} 20-2\log_{\frac{1}{7}} 5$$

15. Вычислить: $\log_3\frac{1}{3\sqrt{27}}\cdot\log_{0,6}\frac{1}{0,36}\cdot\lg 100\sqrt{0,01}$

16. Упростить: $\log_6\sqrt[3]{32}+\log_6\sqrt[3]{16}+\log_7\sqrt[3]{8}$

Практическое занятие№9
Тема: Вычисление и сравнение логарифмов

Цель : корректировать знания, умения и навыки в теме: Вычисление и сравнение логарифмов; закрепить и систематизировать знания по теме.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Порядок выполнения работы:
1.Ознакомиться с теоретическим материалом.
2.Изучить условие заданий для практической работы, выполнить практическую работу.
3.Оформить отчет о работе

Теоретическая часть.

Определение: Логарифмом положительного числа b по основанию a

(обозначается $\log_a b$) — называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b, где **b > 0**, **a > 0**, **a≠ 1**.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \text{ ; } \log_a a^x = x$$

Примеры.

$\log_2 8 = 3,\ \text{так как } 2^3 = 8;$

$\log_7 49 = 2,\ \text{так как } 7^2 = 49;$

$\log_5 \frac{1}{5} = -1,\ \text{так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2},\ \text{так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

Десятичный логарифм — логарифм с основанием 10, который обозначается как $\lg$

$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$

Натуральный логарифм — логарифм с основанием e, обозначается $\ln$

Свойства логарифмов.

При $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$

$a^{\log_a b} = b$ $\quad 8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$ **Основное логарифмическое тождество**

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

Логарифм частного — это разность логарифмов

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\quad \frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа $\log_a b^m = m \log_a b$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$ Показатель степени основания логарифма

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b$$

- в частности если m = n, мы получаем формулу:

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b$$

,

$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$ например:

Переход к новому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

частности, если с = b, то $\log_b b = 1$, и тогда:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$ Пример:

Практическая часть.

Вариант 1

$\log_2 \frac{1}{8} + \log_4 64 + \lg 100$ $\log_2 4 \cdot \log_3 27 : \log_2 \frac{1}{64}$ 1.Вычислить:

2.Вычислить:

3.Вычислить: $\log_2 \log_{\sqrt{7}} 49$

4.Вычислить: $\log_6 2 + \log_6 3$

5.Вычислить: $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$

6.Вычислить: $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$

7.Вычислить: $2^{2\log_2 10}$

8.Вычислить: $2^{2+\log_2 9}$

9.Вычислить: $3\lg 2 - \lg 4$

10.Вычислить: $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$

$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 19 - \log_{\frac{1}{2}} 38 + \log_{\frac{1}{2}} 3$ 11.Найти число x по данному логарифму:

Вариант 2

$\log_4 \frac{1}{64} + \log_3 81 + \lg 0{,}1$

1.Вычислить:

2. Вычислить: $\log_5 125 : \log_4 16 \cdot \log_{0,5} \frac{1}{32}$

3.Вычислить: $\log_{\frac{1}{27}} \log_5 125$

4.Вычислить: $\log_6 12 + \log_6 3$

5.Вычислить: $\log_2 15 - \log_2 30$

6.Вычислить: $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$

7.Вычислить: $6^{3\log_6 4}$

8.Вычислить: $2^{2+\log_2 9}$

9.Вычислить: $2\lg 5 - \lg 8$

10.Вычислить: $2\log_3 135 - \log_3 20 - 2\log_3 6$

$\log_{0,2} x = \log_{0,2} 93 + \log_{0,2} 34 - \log_{0,2} 31$

11.Найти число x по данному логарифму:

Контрольные вопросы:

1. Дать определение основного логарифмического тождества?
2. Запишите формулу для вычисления логарифма произведения?
3. Запишите формулу перехода к новому основанию логарифма?

Практическое занятие № 10

Тема: Контрольная работа №1 по теме: Корни, степени, логарифмы.

Цель: Отработать навыки применения свойств корня n-й, логарифмов, степеней.

Методический материал

Корень n-й степени из числа a определяется как такое число b, что Здесь n — натуральное число, называемое показателем корня (или степенью корня); как правило, оно больше или равно 2, потому что случай n=1 не представляет интереса.

Возвести число a в степень n значит умножить это число само на себя n раз:$a^4=a*a*a*a$

Арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число b, n-й степень которого равняется a.

Логарифм числа x>0 по основанию a>0, - это показатель степени y, к которой нужно поднести число a, чтобы получить x.

$0^n=0, n\neq 0$ $1^n=1$ $a^0=1$ $a^1=a$ $a^n*a^m=a^{n+m}$ $(a*b)^n=a^n*b^m$ $(a^n)^m=a^{n*m}$

logaa=1 loga1=0

$\log_a(bc)= \log_a b + \log_a c$

В1	В2
1.Вычислить:	1.Вычислить:
а)$\log_6 2 + \log_6 3$	а)$\log_4 2 + \log_9 3$
б)$\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$	б)$\log_5 10+ \log_5 12 + \log_4 8$
в)$2^{2\log_2 10}$	в)$3^{2\log_4 16}$
г)$4^{2 + \log_3 9}$	г)$2^{2 + \log_4 12}$
2.Решить уравнения:	2.Решить уравнение:

а)$\log_3(5x-1)$ а)$\log_4(10+2x)$

б)$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)$ б)$\log_{0,5}(2x-5)$

3.Верно ли равенство: 3.Верно ли равенство:

а) $\sqrt[4]{2^4}=2$ а)$\sqrt[4]{(-4)^4}=4$

б)$\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$ б)$\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

Практическое занятие № 11

Тема: Признаки взаимного расположение прямых. Угол между прямыми.

Цель: Отработать навыки решения задач по определению угла между прямыми.

Методический материал

1. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

2. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

3. Теорема о параллельных прямых. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

4. Пересекающимися - называются две прямые лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку.

5. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Углы между прямыми

1. Если прямые параллельны, то угол между ними — $0°$.

2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол $90°$).

3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Варианты заданий практической работы

Вариант 1

1. Какие две прямые в пространстве называются параллельными?

2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

3. Какие возможны случаи взаимного расположения прямой и плоскости?

4. Дан куб ABCDA1B1C1D1. Запишите четыре пары параллельных прямых.

5. Верно ли утверждение: если одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости, то вторая прямая не пересекает эту плоскость.

Вариант 2

1. Какие прямая и плоскость называются параллельными?

2. Сформулируйте теорему о параллельных прямых.

3. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

4. Дан куб ABCDA1B1C1D1. Запишите четыре пары пересекающихся прямых.

5. Верно ли утверждение: если одна из двух прямых параллельна плоскости, а вторая пересекает эту плоскость, то прямые параллельны.

Практическое задание № 12

Тема: Взаимное расположение прямых и плоскостей.

Цель: Отработать навыки определения взаимного расположения прямых и плоскостей.

Методический материал

1. Прямая лежит на плоскости - прямая лежит на плоскости, если все точки прямой принадлежат плоскости.

2. Прямая пересекает плоскость - Прямая пересекает плоскость, если прямая и плоскость имеют единственную общую точку.

3. Прямая параллельна плоскости - Прямая параллельна плоскости, если прямая и плоскость не имеют общих точек. (они не пересекаются).

Варианты заданий практической работы

Вариант 1

1) Дано: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$; $AM = MC$; $BN = NC$.

Доказать: $MN \parallel \alpha$.

2) Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через середину отрезка C и концы отрезка A и B проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках A1, B1, C1.

Вычислить длину отрезка CC1, если $AA1 = 5$, $BB1 = 7$.

3) Дано: EF – средняя линия трапеции KMNP и ΔABC. Докажите: $AC \parallel KP$. Найдите: KP и MN.

Вариант 2

1) Дано: $AC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = M$; $CB \cap \alpha = N$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta MBN$.

2) Точка M лежит на отрезке AB. Отрезок AB пересекается с плоскостью α в точке B. Через A и M проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках A1 и M1.

Найдите длину отрезка AB, если $AA1 : MM1 = 3 : 2$, $AM = 6$.

3) Дано: ST – средняя линия ΔBMC, PQ – средняя линия ΔAMD, XY – средняя линия трапеции ABCD. Докажите: $PQ \parallel ST$. Найдите: PQ и ST.

Практическое задание № 13

Тема: Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью

Цель: Научиться использовать свойства перпендикуляра и наклонных к плоскости при решении задач.

Методический материал

1. Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

2. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

3. *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

4. *Наклонной*, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

5. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*.

6. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.

7. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Варианты заданий практической работы

Вариант 1

1) Прямая ОМ перпендикулярна плоскости треугольника АВС и проходит через центр О вписанной в него окружности.

Докажите, что точка М равноудалена:

1. От прямых АВ, ВС, СА.

2. От всех точек вписанной окружности и от всех касательных к ней.

2) Прямая ОК перпендикулярна к плоскости ромба ABCD, диагонали которого пересекаются в точке О.

Докажите, что расстояние от точки К до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны.

3) Верны ли утверждения?

1. Если две прямые перпендикулярны друг другу, то они пересекаются;

2. Перпендикуляр всегда меньше наклонной, проведенной из этой же точки;

3. Если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна наклонной.

4) Закончите предложения.

1. Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется …

2. Основанием наклонной называется …

3. Проекцией наклонной на плоскость называется …

Вариант 2

1) Прямая ОМ перпендикулярна плоскости треугольника АВС и проходит через центр О вписанной в него окружности.

1. Докажите равенство углов наклона прямых МТ (где Т – любая точка окружности) к плоскости АВС.

2. Найдите тангенс этих углов.

2) Длина наклонной АК, проведенной из точки А к плоскости α равна 8 см, а угол между прямой и этой плоскостью равен $60°$. Найдите длину проекции наклонной на плоскость α.

3) Верны ли утверждения?

1. Если наклонные равны, то длины их проекций тоже равны;

2. Если прямая параллельна плоскости, то угол между прямой и плоскостью равен $0°$;

3. Угол между прямой и плоскостью находится в пределах от $0°$ до $90°$.

4) Закончите предложения.

1. Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется…

2. Основанием перпендикуляра называется …

3. Расстоянием от точки до плоскости называется …

Практическое задание № 14

Тема: Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости, Теорема о трех перпендикулярах.

Цель: Закрепить теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости, о трех перпендикулярах при решении задач .

Методический материал

Теоремы:

1. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

2. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

3. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

4. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

5. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

6. Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна некоторой прямой на этой плоскости.

7. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

8. Все точки прямой, параллельной плоскости, одинаково удалены от этой плоскости.

9. Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

10. через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Варианты заданий практической работы

Вариант 1

1) Прямая АК перпендикулярна к плоскости правильного треугольника АВС, точка М – середина стороны ВС.

Докажите, что $MK \perp BC$

2) Из точки М проведен перпендикуляр МВ к плоскости прямоугольника ABCD.

Докажите, что треугольники AMD и MCD – прямоугольные.

3) Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая SO, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Вариант 2

1) Прямая АК перпендикулярна к плоскости правильного треугольника АВС, точка М – середина стороны ВС.

Найдите угол между прямой КМ и плоскостью АВС, если АК = а, ВС = 2а.

2) Из точки М проведен перпендикуляр МВ к плоскости прямоугольника ABCD

Найдите угол между прямой MD и плоскостью ABC, если CD = 3см,

AD = 4 см, MB=5 см.

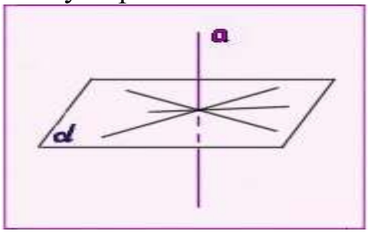
3) Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна 9,6. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем CM=28. Найти расстояние от точки M до гипотенузы AB .

Практическое занятие№15

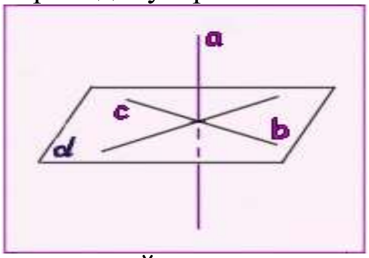
Тема: Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.

Цель :формирование пространственных представлений прямых и плоскостей в пространстве – перпендикулярные прямые и плоскости.

Теоретические сведения:
Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.



ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.
Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.



***1-ое** СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.*
Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

***2-ое** СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.*
Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
Практическое содержание:
Вариант 1.

1. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если
2. Если одна из параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то ….
3. Точка Е не принадлежит плоскости прямоугольника ABCD, BE $\perp$AB, BE $\perp$BC. Тогда прямая и плоскость BCE:
а) параллельны, б) перпендикулярны, в) скрещиваются, г) прямая лежит в плоскости, д) перпендикулярны, но не пересекаются.

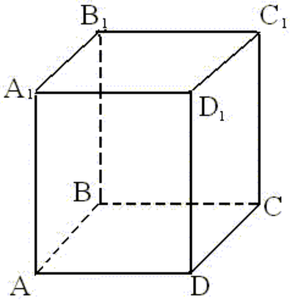


Рис.1

.

4. Назовите:
1) рёбра, перпендикулярные к плоскости (DCC_1)
2) плоскости, перпендикулярные ребру BB_1
5. Определите взаимное расположение:
1) прямой CC_1 и плоскости (DCB)
2) прямой D_1C_1 и плоскости (DCB)
6. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если AC=a, BC=b, AD=c.

Вариант 2.

1.Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если……
2. Если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она…
3. Расстояния от точки M до сторон прямоугольного треугольника ABC (угол C равен 90°) равны. Какое из следующих утверждений верно?
а) плоскости MAB и ABC перпендикулярны, б) плоскости MBC и ABC перпендикулярны, в) плоскости MAC и ABC перпендикулярны, г) плоскости MAC и MBC перпендикулярны, д) условия в пунктах а - г неверны
4. Назовите:
1) рёбра, перпендикулярные к плоскости (BCC_1)
2) плоскости, перпендикулярные ребру AA_1
5. Определите взаимное расположение:
1) прямой DD_1 и плоскости (DCB)
2) прямой D_1C_1 и плоскости (BCB_1)

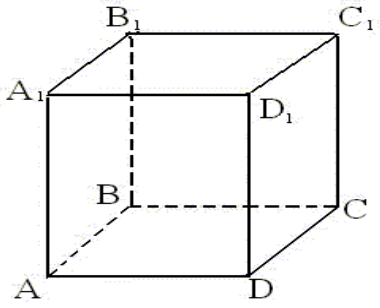


Рис.1

6. . Отрезок BM перпендикулярен к плоскости прямоугольника ABCD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна к плоскости MBC.

Практическое занятие №16

Тема: Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями, скрещивающимися прямыми.

Цель: Научиться применять признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей при решении задач.

Методические комбинации

Пример 1. Расстояние между параллельными плоскостями равно 8 см. Отрезок прямой длина которого 17 см расположен между ними так, что его конец принадлежит плоскости. Найти проекцию этого отрезка на другую плоскость.

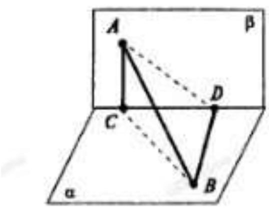
Дано: $\alpha \parallel \beta$, $AB \cap \alpha = A$, $AB \cap \beta = B$, $AB = 17$ см, $AC = 8$ см.

Найти: BC

Решение: Δ ACB – прямоугольный, $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, $BC = 15$ см.

Ответ: BC = 15 см.

Пример 2. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB если:



а) AC = 6 м, BD = 7 м, CD = 6 м, б) AD = BC = 5 м, CD = 1 м.

Решение:

1) Пусть плоскости α и β перпендикулярны. CD – прямая пересечения плоскостей, тогда $AC \perp CB$ и $BD \perp AD$. Тогда в Δ ACB:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, но из Δ CDB следует, что: $BC^2 = CD^2 + BD^2$, так что

$AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2$. $AB^2 = 6^2 + 7^2 + 6^2 = 36 + 49 + 36 = 121$, $AB = 11$

2) $AB^2 = AC^2 + BC^2$, но из Δ CDA следует ,что: $AC^2 = AD^2 - CD^2$,

так что $AB^2 = AD^2 - CD^2 + BC^2$. $AB^2 = 5^2 - 1^2 + 5^2 = 25 - 1 + 25 = 49$,

$AB = 7$

Ответ: а) 11 м, б) 7 м.

Пример 3. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линия пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от нее на 1,2 м. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

Решение:

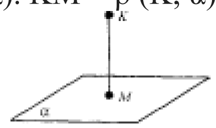
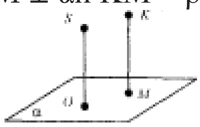
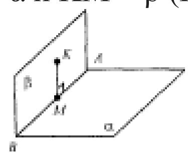
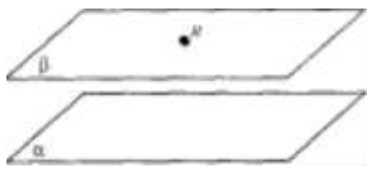
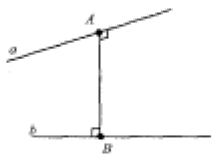
Пусть $\alpha \perp \beta$, $b \parallel c$, BC = 1, AB = 0,5м , где $AB \perp c$ и $BC \perp b$.

Тогда по теореме о 3 – х перпендикулярах $AC \perp b$. Так что

AC – искомое расстояние и $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1{,}2^2 + 0{,}5^2 = 1{,}44 + 0{,}25 = 1{,}69$, AC = 1,3

Ответ: AC = 1,3 м.

4) Построить таблицу

<table>
<tr><td colspan="3">Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.</td></tr>
<tr><td>Проводим KM ⊥ α
(M ∈ α). KM = ρ (K; α).
</td><td>SO ⊥ α.
Проводим KM ∥ SO.
Тогда KM ⊥ αи KM = ρ (K; α).
</td><td>Проводим через точку K плоскость β ⊥ α (β пересекает α по AB). Проводим KM ⊥ AB.
Тогда KM ⊥ α и KM = ρ (K; α).
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью</td></tr>
<tr><td>Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от произвольной точки этой прямой до плоскости.</td><td>a ∥ α, A ∈ a, ρ (a; α) = ρ (A; α).
Выбираем на прямой a произвольную точку A и находим расстояние от этой точки до плоскости α.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Расстояние между параллельными плоскостями</td></tr>
<tr><td>Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной плоскости до второй плоскости.</td><td>β ∥ α, B ∈ β, ρ (β; α) = ρ (B; α).
Выбираем в плоскости β произвольную точку B и находим расстояние от этой точки до плоскости α.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Расстояние между скрещивающимися прямыми</td></tr>
<tr><td colspan="2">Общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.
Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Она равна расстоянию между параллельными плоскостями, которые проходят через эти прямые.</td><td>
AB ⊥ a, AB ⊥ b; ρ (a; b) = AB.
Прямые a и b — скрещивающиеся.</td></tr>
</table>

Задания к практической работе

1. Два отрезка длин, a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины, а) на плоскость равна с. Найдите проекцию второго отрезка, если, a = 13, b = 15, с = 5 см.
2. Две параллельные плоскости расстояние между которыми 6 дм, пересечены прямой, составляющей с каждой из плоскости угол в 30^0. Найти длину отрезка этой прямой, заключенной между плоскостями.
3. Расстояние между параллельными плоскостями равно 10 см. Отрезок прямой длина которого 26 см расположен между ними так, что его конец принадлежит плоскости. Найти проекцию этого отрезка на другую плоскость.
4. Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ если: а) АС = 3 м, BD = 4 м, CD = 12 м, б) AD = 4 м, ВС = 7 м, CD = 1 м.
5. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка А, расстояние от которой до прямой с (линия пересечения плоскостей) равно 0,9 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой с и отстоящая от нее на 1,2 м. Найдите расстояние от точки А до прямой b.

Практическое занятие №17

Тема: История развития комбинаторики, её роль в различных сферах человеческой деятельности. Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки

Цель: знакомство с развитием комбинаторики, формирование навыков вычисления размещений, сочетаний и перестановок

Методические комбинации

<u>Комбинаторика</u> – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Комбинаторика связана со многими другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и имеет широкий спектр применения в различных областях знаний (например, в генетике, информатике, статистической физике).

Перестановками из n *элементов* называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n и читают «пэ энное». Формула числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Размещениями из m *элементов по* n *элементов* ($n \leq m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн».

Формула для вычисления A_m^n - числа размещений из m элементов по n элементов имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot \left(m-(n-1)\right)} \qquad (37.2)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12;\ A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Отметим, что правая часть формулы (2) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m. Пусть в формуле (2) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n$$

т. е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$\boldsymbol{A_n^n = P_n}$$

Задания к практической работе

Задание 1. Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно записать, используя цифры:

1) 1, 2 и 3;

2) 4, 5 и 6;

4) 6, 7, 8 и 9;

6) 0, 3, 5 и 7?

Задание 2. Сколько различных трёхзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр:

1) 3, 4 и 5;

2) 7, 8 и 9;

3) 5, б, 7 и 8;

4) 1, 2, 3 и 4?

Задание 3. Сколько различных четырёхбуквенных *слов* можно записать с помощью букв:

1) «м» и «а»;

2) «п» и «а»;

3) «к», «а» и «о»;

4) «ш», «а» и «л»?

Задание 5. Сколькими способами могут распределиться золотая и серебряная медали на чемпионате по футболу, если в нём принимают участие 32 команды?

Задание 6. Сколькими способами можно составить расписание 5 уроков на один день из 5 различных учебных предметов?

Задание 7. Сколькими способами могут занять очередь в школьный буфет:

1) 6 учащихся;

2) 5 учащихся?

Задание 8. Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из 10 гласных букв с последующим трёхзначным числовым кодом?

Задание 9. Найти значение:

1) P_5 ;

2) P_7 ;

3) P_9 ;

4) P_8 .

Задание 10. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:

1) первой была цифра 5, а второй - цифра 1;

2) последними были цифры 1 и 2, расположенные в любом порядке?

Задание 11. Упростить форму записи выражений (полагая, что k - натуральное число, $k > 4$):

1) $15 \cdot 14!$;

2) $k!\,(k+1)$;

3) $(k-2)!\,(k-1) \cdot k$;

4) $(k-4)!\,(k^2-5k+6)$;

Задание 12. Найти значения выражения:

1) $\frac{26!}{25!}$;

2) $\frac{32!}{31!}$;

3) $\frac{12!}{10!}$;

4) $\frac{14!}{12!}$;

5) $\frac{5! \cdot 3!}{7!}$;

6) $\frac{6! \cdot 4!}{8!}$;

7) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$;

8) $\frac{11!}{9! \cdot 2!}$.

Задание 13. Упростить выражение (буквами n и m обозначены натуральные числа)

1) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$;

2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}$;

3) $\frac{m!(m+1)!}{(m+2)!}$;

4) $\frac{(m+3)!}{(m+1)!(m+2)}$.

Задание 14. Решить уравнение относительно n :

1) $\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{4}$;

2) $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$

Практическое занятие №18

Тема: Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач

Цель: оценить знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала

1 вариант

1. Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} \cdot A_x^4$
2. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3-х человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?
3. Брошена игральная кость. Найти вероятность:
   а) появления четного числа очков;
   б) появления не больше двух очков.
4. В партии из 15 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей 3 стандартные.

2 вариант

1. Решите уравнение: $30x = A_x^3$
2. Сколькими способами можно расставить 6 томов энциклопедии, чтобы они стояли в беспорядке?
3. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется:
   а) черным;
   б) белым.
4. Первенство по футболу оспаривают 20 команд, среди которых 7 лидирующих. Путем жеребьевки команды распределяются на две группы по 10 команд в каждой. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

3 вариант

1. Решите уравнение: $30A_{x-2}^4 = A_x^5$
2. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3-х на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?
3. Брошена игральная кость. Найти вероятность:
   а) появления четного числа очков;
   б) появления не больше трех очков.
4. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

4 вариант

1. Решите уравнение: $20A_{x-2}^3 = A_x^5$

2. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг стола?
3. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,82, для второго 0,75. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.
4. В ящике имеется 80 стандартных деталей и 20 нестандартных. Из ящика наудачу берут одну за другой две детали. Какова вероятность появления стандартной детали при первом испытании, при втором испытании?

5 вариант

1. Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$
2. Бригадир должен отправить на работу 4 человек. Сколькими способами это можно сделать, если бригада состоит из 10 человек?
3. В урне 20 шаров. 17 белых и 3 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего, шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров три белых.
4. Найти математическое ожидание с.в. X, если закон ее распределения задан таблицей:

x_i	1	2	3	4
P_i	0,3	0,1	0,2	0,4

6 вариант

1. Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$
2. Сколькими способами можно расставить 5 томов, чтобы они стояли в беспорядке?
3. В учебных мастерских на станках a, b и c изготавливают соответственно 30 %, 45 % и 25 % всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 13 %, 11 % и 5 %. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна.
4. Найти дисперсию дискретной с.в. X, зная закон ее распределения:

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Практическое занятие № 19

Тема: Размещения, сочетания, перестановки
Цель: Научиться вычислять число размещений , сочетаний , перестановок.

Методические комбинации

Определение.
Произведение всех натуральных чисел от **1** до **n** включительно называют

n – факториалом и пишут $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

0!=1 1!=1

Перестановки	**Размещения**	**Сочетания**
n элементов n мест	n элементов m мест	n элементов m мест
порядок имеет значение	порядок имеет значение	порядок не имеет значение
$P^{= n!}$	1¿ $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 2¿ $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример 1. За столом пять мест. Сколькими способами можно расставить пятерых гостей?

Решение: $P_5 = 5! = 1*2*3*4*5 = 120$ способов

Ответ: 120 способов.

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,3,6,7,9, если каждая их них может быть использована в записи только один раз?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

Ответ: 60 чисел.

Пример 3. а) Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Следовательно, по формуле получаем $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!\cdot(15-3)!} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} = 13\cdot 7\cdot 5 = \ldots \text{способов}$

Ответ: 455 способов.

Задания к практической работе

1. За столом семь мест. Сколькими способами можно расставить семерых гостей?
2. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,2,4,6,7,9, если каждая их них может быть использована в записи только один раз?
3. Из 25 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
4. В конкурсе участвуют 12 фирм, из которых жюри должно выбрать три фирмы на 1-е, 2-е и 3-е места. Сколько вариантов решения жюри существует?
5. В соревнованиях по футболу принимают участие 8 команд. Сколько должно состояться матчей, чтобы команды встретились друг с другом по одному разу?
6. Сколькими способами можно распределить 6 пригласительных билетов в группе из 20 студентов?
7. Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$
8. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$
9. Вычислить $\frac{P_6-P_5}{P_4}$
10. Вычислить A_8^4 ; C_{10}^4

Практическое занятие№20

Тема: Бином Ньютона и треугольник паскаля. Прикладные задачи

Цель: применить умения по решению практических задач по теме «Бином Ньютона треугольник Паскаля

Методические комбинации

Бином Ньютона— формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных

Биномом Ньютона называют формулу представляющую выражение при целом положительном *n* в виде многочлена:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

Треугольник Паскаля— бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван в честь Блеза Паскаля. Числа, составляющие треугольник Паскаля, возникают естественным образом в алгебре, комбинаторике, теории вероятностей, математическом анализе, теории чисел.

Треугольник можно продолжать до бесконечности, но на практике чаще составляют таблицу для первых 10 степеней.

Биноминальные коэффициенты часто читаются как «число сочетаний из *n* элементов по *k*».

- Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.
- В строке с номером *n*:
  - первое и последнее числа равны 1.
  - второе и предпоследнее числа равны *n*.
  - третье число равно треугольному числу, что также равно сумме номеров предшествующих строк.
  - четвёртое число является тетраэдрическим.
  - *m*-е число (при нумерации с 0) равно биноминальному коэффициенту .
- Сумма чисел восходящей диагонали, начинающейся с первого элемента (*n*-1)-й строки, есть *n*-е число Фибоначчи:

Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.

- Сумма чисел *n*-й строки треугольника Паскаля равна.
- Все числа в *n*-й строке, кроме единиц, делятся на число *n*, тогда и только тогда, когда *n* является простым числом (следствие теоремы Люка).
- Если в строке с нечётным номером сложить все числа с порядковыми номерами вида 3*n*, 3*n*+1, 3*n*+2, то первые две суммы будут равны, а третья на 1 меньше.
- Каждое число в треугольнике равно количеству способов добраться до него из вершины, перемещаясь либо вправо-вниз, либо влево-вниз.

Варианты заданий практической работы

1 вариант	2 вариант
1. Записать разложение бинома:	1. Записать разложение бинома:
а) $(a-9)^9$	а) $(a-8)^9$

б) $(2a+3)^5$

2. Найти четвертый член разложения бинома:

$(x-\sqrt{x})^{14}$

3. С помощью свойства элементов

строки треугольника Паскаля найти сумму:

а) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$

б) $C_{11}^5 + C_{11}^4 + C_{11}^3 + C_{11}^2 + C_{11}^1 + C_{11}^0$

б) $(3a+2)^5$

2. Найти четвертый член разложения бинома:

$(x-\dfrac{1}{x})^{13}$

3. С помощью свойства элементов

строки треугольника Паскаля найти сумму:

а) $C_7^6 + C_7^5 + C_7^4 + C_7^3 + C_7^2 + C_7^1$

б) $C_{11}^5 + C_{11}^4 + C_{11}^3 + C_{11}^2 + C_{11}^1 + C_{11}^0$

Практическое занятие № 21

Тема: Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве.

Цель: Научить использовать свойства векторов при решении задач.

Методические комбинации

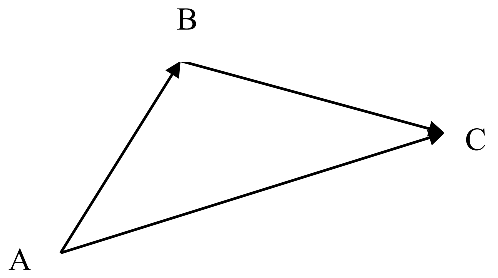
Основные определения, обозначения векторов, действия над векторами в пространстве аналогичны основным характеристикам вектора в пространстве.

Действия над векторами

1) *Сложение векторов.*

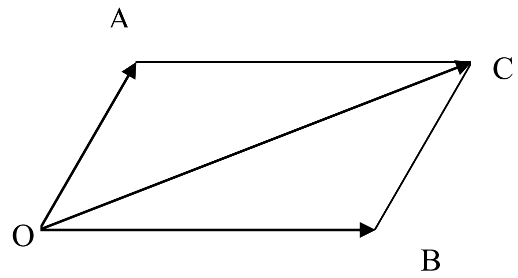
Правило треугольника

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



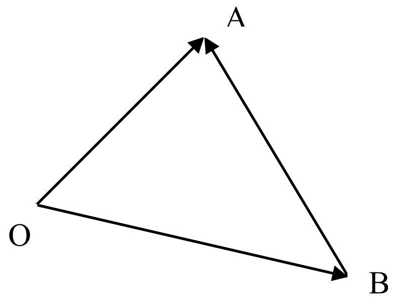
Правило параллелограмма

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$



2) *Вычитание векторов*

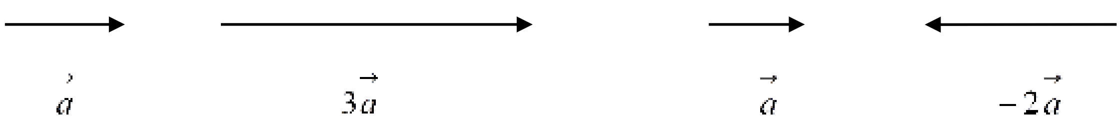
$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$



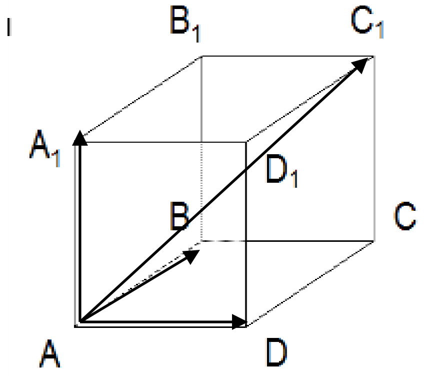
3) *Умножение вектора на число:*

Опр.

Произведением ненулевого вектора a на число k называется такой вектор $\vec{в}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ сонаправлены при k > 0 и противоположно направлены при k < 0



Для сложении *некомпланарных векторов* применяют *правило параллелепипеда*



$$\vec{AA_1}+\vec{AD}+\vec{AB}=\vec{AC_1}$$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, обозначьте вектор $\vec{СД}$ и $\vec{ВС}$ соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$.

а) Изобразите на рисунке векторы $\vec{a}+\vec{в}$, $\vec{a}-\vec{в}$, $2\vec{a}$,

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$

в) Разложите вектор $\vec{BD_1}$ по векторам $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{BB_1}$

2 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, обозначьте вектор $\vec{СД}$ и $\vec{АД}$ соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

а) Изобразите на рисунке векторы $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{c}$

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{DA}+\vec{DC}+\vec{DD_1}$

в) Разложите вектор $\vec{B_1D_1}$ по векторам $\vec{A_1A}$, $\vec{A_1B}$, $\vec{A_1D_1}$

Практическое занятие №22

Тема: Уравнение окружности, сферы, плоскости.

Цель: закрепление знаний.

Методические рекомендации

При решении задач в координатах применяют правила:

1. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x; y; z\}$, то его можно разложить по координатным векторам $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координатные векторы.

   Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{в}\{x_2; y_2; z_2\}$

2. Если $\vec{a}=\vec{в}$, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$

3. $\vec{a}+\vec{в}\ \{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}$

4. $\vec{a}-\vec{в}\ \{x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2\}$

5. $k\cdot\vec{a}\ \{k\cdot x_1; k\cdot y_1; k\cdot z_1\}$

Скалярное произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\alpha$

Скалярное произведение векторов в координатах: $\vec{a}\cdot\vec{в}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$

Вычисление координат середины отрезка

$A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ и $C(x;y;z)$ - середина отрезка

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Вычисление длины вектора по его координатам

$\vec{a}\{x;y;z\}$ $\quad |\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Расстояние между двумя точками

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ $\quad |M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Угол между векторами $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{в}\{x_2;y_2;z_2\}$

$$\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Угол между прямыми , где $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{в}\{x_2;y_2;z_2\}$ - направляющие векторы прямых

$$\cos\alpha=\frac{|\ x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2\ |}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

1 вариант

1)Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$,$\vec{b}\{0; -5; -2\}$, $\vec{c}\{2; 1: -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 3\vec{в} - 2\vec{a} + \vec{c}$

2) Даны точки А(4; -3; 5), В(6; -7; 5), С(5; 2; 1) и Д(3; 6; 1). Докажите, что АВСД – параллелограмм.

3) Вычислите угол между векторами АВ и CD , если А(3; -2; 4), В(4; -1; 2), С(6; -3; 2) , D(7; -3; 1)

4) Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{в} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{в}$.

5) Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

2 вариант

1) Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$,$\vec{b}\{0; -5; -2\}$, $\vec{c}\{2; 1: -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{n} = 3\vec{c} - 2\vec{в} + \vec{a}$

2) Даны точки А(3; 5; 4), В(4; 6; 5), С(6; -2; 1) и Д(5; -3; 0). Докажите, что АВСД – параллелограмм.

3) Определите угол А треугольника, вершинами которого являются точки А(1; -1; 3), В(3; -1; 1), С(-1; 1; 3)

4) Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{в} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{в}$.

5) Написать уравнение сферы радиуса R с центром в точке А, если А(2; 0; -1) , R = 7.

Практическое занятие №23

Тема: Расстояние между точками

Цель: оценить знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала

Методические комбинации

1.Расстояние между точками.

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. Уравнение плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.

Ненулевой вектор n, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M(x_0;y_0;z_0)$ и нормальный вектор n = (*A*, *B*, *C*) плоскости, то ее уравнение имеет вид $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0)$

Равенство выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов n и M_0M.

3.Уравнение окружности.

$x^2 + y^2 = r^2$ - уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом *r*.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ - уравнение окружности с центром в точке $O_1(a;b)$ и радиусом *r*.

4.Уравнение сферы.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ - уравнение сферы в точке с центром $O_1(a;b;c)$ и радиусом *R*.

Пример1:

Дан ΔABC с вершинами в точках A(3; -4; 2), B(-5; 6; 7), C(5; -6; 3).

Найти длину средней линии, параллельной AC.

MN - средняя линия

MN - AC

AC = $\sqrt{(5-3)^2 + (-6+4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$

Ответ: 3.

Пример2:

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1; -2; 4) и перпендикулярный вектору MN, N(3; 4; 5).

$A(x-x_0) + b(y-y_0) + C (z-z_0)=0$

$x_0=1; y_0=-2; z_0=4.$

MN=(3-1; 4+2; 5-4); MN=(2; 6; 1); a=2; b=6; c=1.

2(x-1)+6(y+2)+1(z-4)=0

2x-2+6y+12+z-4=0

2x+6y+z+6=0

Ответ: 2x+6y+z+6=0.

Варианты заданий практической работы

1 Вариант

1. Дан ΔABC с вершинами в точках

A (7; 3; -2)

B (1; 3; 6)

C (0; 0; -1).

Найти длину средней линии параллельной AB.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярный вектору AB, если A(2; 3; -4), B(-1; 2; 2).,

3. Сфера задана уравнением

$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$

а) Назовите координаты центра и радиус сферы.

б) Определите, принадлежит ли данной сфере точки:

A(1; 3; -1)

B(2; 2; 4)

2 Вариант

Дан ΔАВС с вершинами в точках

A (2; 0; 5)

B (3; 4; 0)

C (2; 4; 0).

Найти длину средней линии, параллельный ВС

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А и перпендикулярный вектору АВ,

если A(-2; 1; 3), B(1; -2; 4).

3. Сфера задана уравнением

$x^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25$

а) Назовите координаты центра и радиус сферы.

б) Определите, принадлежит ли данной сфере точки:

A(4; -3; -1)

Практическое занятие № 24

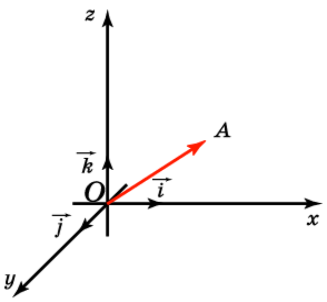
Тема: Действия с векторами ,заданными координатами. Скалярное произведение векторов.

Цель: Отработать умения использовать формулы координат вектора при решении задач.

Методические рекомендации

Вектором (геометрическим) называется направленный отрезок. Обозначается $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\overrightarrow{AB}$

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



<u>Теорема.</u> Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (*x*, *y*, *z*) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$/

Действия над векторами	Запись	Пример
1	2	3
1. Результатом умножения вектора $\bar{a}$ на число k является вектор $\bar{b} = k\bar{a}$	$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, k – число, то $\bar{b} = k\bar{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$	$\bar{a} = (-1;2;0)$; $k = 3$, тогда $\bar{b} = 3\bar{a} = (3\cdot(-1);3\cdot 2;3\cdot 0) =$ $= (-3;6;0)$
2. Сложение векторов. Вычитание векторов.	$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$; $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ $\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$	$\bar{a}(2;-3;1)$; $\bar{b}(0;1;4)$, тогда $\bar{a} + \bar{b} = (2+0;-3+1;1+4) =$ $= (2;-2;5)$
3. Нахождение координат вектора. При определении координат вектора из соответствующих координат его конца вычитают координаты начала	$M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$	$M_1(2;-1;4)$, $M_2(3;1;0)$ $\overline{M_1M_2}(3-2;1-(-1);0-4)$; $\overline{M_1M_2}(1;2;-4)$
4. Длина вектора.	$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\bar{a}(5;-3;1)$ $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$

1	2	3
5. Условие коллинеарности векторов: векторы коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны.	$\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\bar{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$	$\bar{a}(5;6;7)$, $\bar{b}(10;12;14)$ $\dfrac{5}{10}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow$ векторы коллинеарны
6. Скалярное произведение векторов – это число равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.	$\tilde{a}\cdot\bar{b}=\lvert\tilde{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos(\bar{a},^\wedge\bar{b})$ $\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\bar{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	$\bar{a}(2;-3;1)$; $\bar{b}(0;1;4)$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot0+(-3)\cdot1+1\cdot4=$ $=0-3+4=1$
7. Косинус угла между векторами.	$\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$; $\bar{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\cos\varphi=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$	
8. Условие перпендикулярности векторов: векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.	$\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$; $\bar{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$ $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$	$\bar{a}(5:-2;0)$; $\bar{b}(-2;-5;0)$ $5\cdot(-2)+(-2)\cdot(-5)+0\cdot0=$ $=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$

Задания практической работы

Даны точки: $A(0;-N)$, $B(N;0)$, $C(N-5;1-N)$, $D(-N-2;N+1)$, где N – номер студента по списку.

1. Найти координаты, абсолютные величины векторов $A\bar{B}$ и $C\bar{D}$.

4*. Образуют ли векторы $\bar{a}(-1;-2;N)$, $\bar{b}(3;N;-2)$, $\bar{c}(-N;0;7)$ базис?

5**. Найти угол между векторами $A\bar{C}$ и $B\bar{D}$.

6**. Образуют ли векторы $\bar{a}(N;0;5)$, $\bar{b}(3;2;N)$, $\bar{c}(5;N;9)$ базис? Если да, то найти в нем координаты вектора $\bar{d}(-4;2;N)$.

Примечание.
Чтобы получить оценку «3», достаточно решить задания: 1-3. Для получения оценки «4», необходимо решить задания: 1-5, а для получения оценки «5», нужно выполнить все задания.

3*. Проверьте, коллинеарные ли векторы $A\bar{D}$ и $C\bar{D}$?

4*. Образуют ли векторы $\bar{a}(-1;-2;N)$, $\bar{b}(3;N;-2)$, $\bar{c}(-N;0;7)$ базис?

5**. Найти угол между векторами $A\bar{C}$ и $B\bar{D}$.

6^{**}. Образуют ли векторы $\bar{a}(N;0;5)$, $\bar{b}(3;2;N)$, $\bar{c}(5;N;9)$ базис? Если да, то найти в нем координаты вектора $\bar{d}(-4;2;N)$.

Практическое занятие№25

Тема: Векторное уравнение прямой и плоскости. Использование векторов при доказательстве теорем в стереометрии.

Цель работы: закрепить навыки нахождения векторного уравнения и плоскости

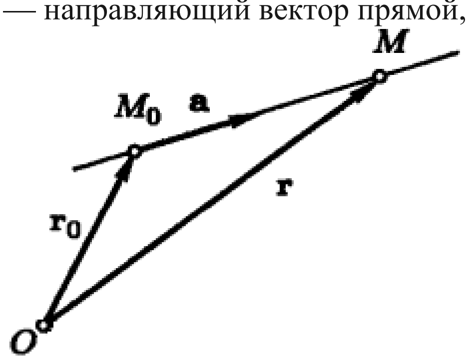
Основные теоретические сведения

Уравнения прямой на плоскости в векторной форме

Векторное уравнение прямой в параметрической форме:

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки Если заданы две различные точки $M1$ $(x1,\ y1)$ и $M2$ $(x2,\ y2)$, принадлежащие прямой l, то вектор $M^{\to\to\to\to\to}$ 1 $^{\to\to}M^{\to\to}$ 2 = $\{x2 - x1,\ y2 - y1\}$ будет являться направляющим вектором прямой l. В качестве опорной точки можно взять любую из точек $M1$, $M2$; например, $M1$. Тогда каноническое уравнение прямой примет вид: $x - x1\ x2 - x1 = y - y1\ y2 - y1$. Это уравнение прямой l, проходящей через две заданные точки на плоскости

где — направляющий вектор прямой, — радиус-вектор некоторой точки прямой.



Нормальное векторное уравнение прямой:

где — вектор нормали к прямой.

Это уравнение также можно записать в форме

причём если вектор — единичный, то величина есть расстояние от точки до прямой. Вообще говоря, это уравнение имеет следующий смысл: *проекция радиус-вектора любой точки прямой на нормаль к этой прямой постоянна*.

Выполните:

Лежит ли точка Р на прямой , АВ если

А(−3;2;1) В(− 1;1;4) Р(0;−2; − 3)

Написать уравнение высот треугольника , АВС если А(1;1;1) В(−3;1;2) С(1;5;0)

Практическое занятие №26

Тема: Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой

Цель: Выявить уровень знаний по теме Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой

Вариант № 1.

1. Выразите в радианах: а) 10°; б) 210°.

2. Выразите в градусах: а) $\frac{\pi}{15}$; б) $\frac{7\pi}{9}$.

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если: $Sin\,\alpha=\frac{12}{13},\ \ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4. Упростите выражение: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+tg^2\alpha$;

5. Докажите тождество: $\cos\alpha=\sin\alpha\cdot ctg\alpha$;

6. Вычислите значение sin2x, если cosx = $\frac{1}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

– $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) – $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{7}\,tg\alpha\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ при $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{5}$

8. Упростите выражение $\frac{1-ctg^2(-x)}{tg^2(x-\pi)-1}\cdot\frac{ctg(\frac{3\pi}{2}-x)}{ctg(\pi+x)}$

9. Найдите значение выражения: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ при x= π

а) $2\sqrt{3}-1$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $\sqrt{3}$; г) 0.

10. Вычислите: $\frac{12}{\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{2}-\frac{3}{\pi}arctg\sqrt{3}$

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\sqrt{3}$; г)1.

11. Решите уравнение $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

а) π\2n; б) $3\sqrt{3}-3$; в) πn; г) 0.

12. Решите уравнение $\sin^2 x+2\sin x=0$

а) π\2+πn; б) πn; в) π\2n; г) πn+2πn.

13. Решите уравнение $\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}$

а) x=(-1)n+1π\3+πn; б) x=(-1)nπ\6+πn; в) x=(-1)nπ\3+πn; г) x=(-1)n+1π\2+πn.

14. Решите уравнение $\sin^2 x+2\sin x=3$

а) x=π\3+πn; б) x=π\2+2πn; в) x=π\6+2πn; г) x=2π\3+πn.

15. Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют … числа t.

16. Угол в один радиан – это … угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

17. Какая из тригонометрических функции является четной функцией?

18. Решите уравнение $7\sin^2(5\pi+x)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(x-7\pi)=0$.

Вариант № 2.

1. Выразите в радианах: а) 15°; б) 225°.

2. Выразите в градусах: а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если: $\cos\alpha=-\frac{1}{5},\quad \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

4. Упростите выражение: $1-\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

5. Докажите тождество: $\sin\alpha=\cos\alpha\cdot tg\,\alpha$;

6. Вычислите значение $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) – 0,5 ; 4) 0,5.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\,ctg\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ при $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Упростите выражение $\frac{1-tg^2(-x)}{tg^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}\cdot\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{tg(\pi+x)}$

9. Найдите значение выражения: $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ при x= $\frac{\pi}{4}$

а) 1; б) 0,5; в) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; г) 1,5.

10. Вычислите: $\frac{12}{\pi}\cdot arcctg(-\sqrt{3})+\frac{8}{\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$

а)0; б) $\frac{1}{2}$; в)1; г) $-\frac{1}{2}$.

11. Решите уравнение $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

а) π\2n; б) π\2+2πn; πn. в) 2π\3+2πn; 2πn.; г) π+2πn; πn.

12. Решите уравнение $\sin^2 x-3\sin x=0$

а) π\2n; б) 2πn, в) π\3+πn; г) πn.

13. Решите уравнение $\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}$

а) ±π\2n; б) ±π\2+2πn; в) ±π\4+2πn; г) ±π+2πn; πn.

14. Решите уравнение $\cos^2 x-3\cos x=4$

а) π\2 +2πn; б) 2πn. в) π\3+πn; г) π+2πn.

15. Если точка М числовой окружности соответствует числу t, то ординату точки М называют … числа t. 16. Если функция ограничена и снизу и сверху, то её называют … . 17. Какие тригонометрические функции являются нечетными функциями?

18. Решите уравнение $\sin^2\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos(7\pi-x)\cdot\sin(x+13\pi)=0$. Записать полное решение.

Практическое занятие № 26.

Тема: Основные тригонометрические тождества , формулы сложения , удвоения.
Цель: Отработать навыки работы с тригонометрическими формулами.

Методические рекомендации

I. Основные тригонометрические тождества.

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1;\ \sin^2 x=1-\cos^2 x;\ \cos^2 x=1-\sin^2 x$
2. $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}\ \Rightarrow\ \sin x=tgx\cdot\cos x$
3. $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}\ \Rightarrow\ \cos x=ctgx\cdot\sin x$
4. $tgx\cdot ctgx=1\ \Rightarrow\ tgx=\frac{1}{ctgx}$ и $ctgx=\frac{1}{tgx}$
5. $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$
6. $1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}$

II. Формулы сложения.

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

III. Формулы двойного и половинного аргументов.

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;\ \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
3. $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
5. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
6. $tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

IV. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}+2tg\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin 315^\circ\cdot\cos 225^\circ+ctg 210^\circ\cdot tg 300^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\cos 120^\circ\cdot\cos 50^\circ+\sin 120^\circ\cdot\sin 50^\circ}{\cos 25^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 25^\circ\cdot\sin 45^\circ}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

3. Упростите выражения:

а) $2\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+tg(\pi-\alpha)\cdot ctg(2\pi+\alpha)$

б) $\frac{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}$; в) $\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

1. Доказать тождество: $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha+ctg\alpha}=\cos^2\alpha$

2 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+3tg\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 210^\circ\cdot\sin 300^\circ+ctg 45^\circ\cdot tg 225^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\sin 5^\circ\cdot\cos 25^\circ+\cos 5^\circ\cdot\sin 25^\circ}{\cos 80^\circ\cdot\cos 50^\circ+\sin 80^\circ\cdot\sin 50^\circ}$;

б) $2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$

3. Упростите выражения:

а) $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)+tg(\pi+\alpha)\cdot ctg(2\pi-\alpha)$

б) $\frac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}$; в) $\frac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}$

4. Доказать тождество:

$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$

3 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin 225^\circ\cdot\cos 300^\circ+tg 45^\circ\cdot ctg 135^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\cos 18^\circ\cdot\cos 12^\circ-\sin 18^\circ\cdot\sin 12^\circ}{\sin 23^\circ\cdot\cos 7^\circ+\cos 23^\circ\cdot\sin 7^\circ}$;

б) $\frac{2tg 15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$

3. Упростите выражения:

4 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\pi-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos 135^\circ\cdot\sin 210^\circ+ctg 300^\circ\cdot tg 315^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\sin 35^\circ\cdot\cos 5^\circ-\cos 35^\circ\cdot\sin 5^\circ}{\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ-\sin 20^\circ\cdot\sin 10^\circ}$

б) $\frac{tg 73^\circ-tg 13^\circ}{1+tg 73^\circ\cdot tg 13^\circ}$

3. Упростите выражения:

а) $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

б) $\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\cos 3\alpha-\cos\alpha}$; в) $\frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha+ctg\,\alpha}$

4. Доказать тождество:

$$\frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha+ctg\,\alpha}=\sin^2\alpha$$

а) $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

б) $\frac{\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}{\sin 4\alpha+\sin 6\alpha}$

4. Доказать тождество:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=\sin 2\alpha$$

Практическое занятие № 27

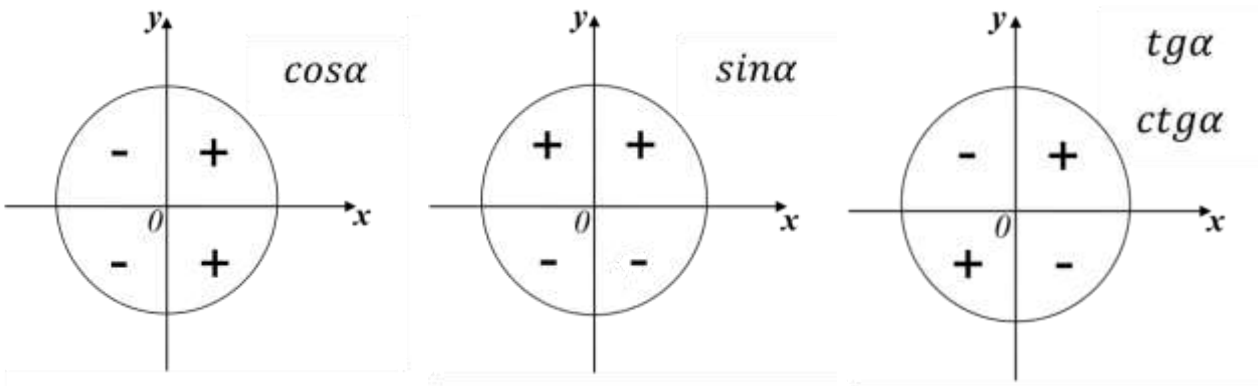
Тема: Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения

Цель: Отработать умения использовать свойства тригонометрических функций при преобразовании тригонометрических выражений.

Методические рекомендации

При выполнении заданий данной практической работы, воспользуйтесь методическими рекомендациями к практической работе № 4, а также предложенными методическими рекомендациями.

Знаки значений тригонометрических функций по четвертям.



Формулы приведения.

Если в формуле аргумент функции имеет вид: $\alpha; \frac{\pi}{2} \pm \alpha; \pi \pm \alpha; \frac{3\pi}{2} \pm \alpha; 2\pi \pm \alpha$, то данные формулы называются формулами приведения.

При составлении формул приведения, необходимо пользоваться следующими правилами:

1. Знак функции, стоящей в правой части равенства, определяется по знаку функции, стоящей в левой части равенства.
2. Если аргумент функции имеет вид: $\pi \pm \alpha; 2\pi \pm \alpha$, то название функции не меняется. Если же аргумент функции имеет вид: $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha; \frac{\pi}{2} \pm \alpha$, то название функции меняется на сходное: $\sin$ на $\cos$, tg на ctg и наоборот.

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Найдите значение выражения: $2\sin 60^\circ + \cos 90^\circ - tg 45^\circ$

   1) $2\sqrt{3} - 1$; 2) $\sqrt{3} - 1$; 3) $\sqrt{3}$; 4) 0

2. Сравните с нулем выражения: $\sin 120^\circ$; $\cos 195^\circ$; $ctg 359^\circ$.

   1) + - - 2) - - + 3) + + - 4) + - +

3. Вычислите: $6\cos^2 \frac{\pi}{4} + tg^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - ctg\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

   1) 12; 2) $\sqrt{3} - 3$; 3) 6; 4) 0

4. Упростите выражение: $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

1) $-\cos^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$

5. Упростите выражение: $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ctg\,\alpha-1$

1) 0; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $-\sin^2\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$

6. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

1) $\sin\alpha-\cos\alpha$; 2) $-2ctg\,2\alpha$; 3) $tg\,2\alpha$; 4) $0{,}5ctg\,2\alpha$

7. Вычислите: $2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{1}{2}$

8. Вычислите: $\cos\dfrac{7\pi}{4}$

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 0

9. Представив 105° как $60^\circ+45^\circ$, вычислите $\sin 105^\circ$

1) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

10. Дано: $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, где $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $tg\,2\alpha$.

1) $\dfrac{6}{7}$; 2) $-3\dfrac{3}{5}$; 3) $1\dfrac{5}{7}$; 4) $3\dfrac{3}{7}$

2 вариант

1. Найдите значение выражения: $5\sin 30^\circ - ctg\,45^\circ+\cos 180^\circ$

1) $2{,}5$; 2) $0{,}5$; 3) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; 4) $1{,}5$

2. Сравните с нулем выражения: $\sin 187^\circ$; $\cos 125^\circ$; $tg\,80^\circ$

1) + - + 2) - + + 3) - - + 4) - + -

3. Вычислите: $5\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+4\cos 0-3\sin\dfrac{3\pi}{2}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}$

1) $2\dfrac{3}{4}$; 2) $-4\dfrac{1}{4}$; 3) $-4\dfrac{3}{4}$; 4) $1\dfrac{3}{4}$

4. Упростите выражение: $\frac{tg(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

1) $tg^2\alpha$; 2) $-tg^2\alpha$; 3) $-ctg^2\alpha$; 4) $ctg^2\alpha$

5. Упростите выражение: $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha$

1) $-\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $-2\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha-2\cos\alpha$

6. Упростите выражение: $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$

1) $ctg^2\alpha$; 2) $tg^2\alpha$; 3) $-tg^2\alpha$; 4) $-ctg^2\alpha$

7. Вычислите: $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$

1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 0

8. Вычислите: $\cos 150^\circ$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$

9. Представив 15° как $45^\circ-30^\circ$, вычислите $\cos 15^\circ$

1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

10. Дано: $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $ctg\,2\alpha$

1) $-1\frac{1}{10}$; 2) $-\frac{119}{120}$; 3) $1\frac{1}{119}$; 4) $\frac{119}{120}$

3 вариант

1. Найдите значение выражения: $2\sin 60^\circ\cdot\cos 60^\circ+ctg\,90^\circ$

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0

2. Сравните с нулем выражения: $\sin 300^\circ$; $\cos 105^\circ$; $tg\,70^\circ$

1) - + - 2) + + - 3) - - + 4) + - -

3. Вычислите: $3\sin(-\pi)+2tg\,0-4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\frac{\pi}{3}$

1) $-4\frac{1}{4}$; 2) $-3\frac{3}{4}$; 3) $4\frac{1}{4}$; 4) $1\frac{3}{4}$

4. Упростите выражение: $\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{\sin(\pi-3\alpha)-\sin(-\alpha)}$

1) $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$; 2) 1; 3) $-\dfrac{1}{2\sin\alpha}$; 4) 0

5. Упростите выражение: $\sin\alpha\cdot ctg\,\alpha-\cos\alpha+1$

1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) нет реш.

6. Упростите выражение: $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

1) $-2tg\,\alpha$; 2) $ctg\,\alpha$; 3) $-2ctg\,\alpha$; 4) 1

7. Вычислите: $2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ$

1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 2

8. Вычислите: $\sin\dfrac{2\pi}{3}$

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) 0; 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. Представив 75° как $45^\circ+30^\circ$, вычислите $\sin 75^\circ$

1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

10. Дано: $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$. Вычислите $\cos 2\alpha$

1) $-\dfrac{7}{25}$; 2) $\dfrac{7}{25}$; 3) $\dfrac{4}{15}$; 4) $-\dfrac{4}{15}$

4 вариант

1. Найдите значение выражения: $2\sin 90^\circ+tg\,45^\circ+\cos 270^\circ$

1) 3; 2) 5; 3) 0; 4) 4

2. Сравните с нулем выражение: $\sin 25^\circ$; $\cos 210^\circ$; $ctg\,105^\circ$

1) - - + 2) + - - 3) - + - 4) + - +

3. Вычислите: $4\cos^2\dfrac{\pi}{4}+\sin^2\dfrac{\pi}{3}-tg(-\pi)$

1) $2\dfrac{3}{4}$ 2) $-2\dfrac{3}{4}$ 3) 0 4) 1

4. Упростите выражение: $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1) $tg\alpha$; 2) $\frac{2}{\cos\alpha}$; 3) $-\frac{2}{\cos\alpha}$; 4) $\sin\alpha$

5. Упростите выражение: $-\cos\alpha\cdot tg\alpha\cdot\sin\alpha+1$

1) $\sin^2\alpha$; 2) $-\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $-\cos^2\alpha$

6. Упростите выражение: $\frac{2\sin^2\alpha}{1+\cos(\pi-2\alpha)}-\sin^2\alpha$

1) $-\sin^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $-\cos^2\alpha$

7. Вычислите: $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Вычислите: $\sin 300^\circ$

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$

9. Представьте 15° как $45^\circ-30^\circ$ и вычислите $tg15^\circ$

1) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

10. Дано: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\sin 2\alpha$.

1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{25}{24}$; 3) $-\frac{24}{25}$; 4) $-\frac{25}{24}$

Практическое занятие № 28

Тема: Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Цель: сформировать умение применять формулы к решению задач по изучаемой теме.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделать краткие записи в тетради
2. Изучить условие заданий для практической работы. Оформить отчет по работе

Краткие теоретические сведения.

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

6) $ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента

1) $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 3) $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

2) $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 4) $ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

Формулы половинного аргумента

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Примеры решения задач

Пример 1. Упростить: $\sin40^0 - \sin20^0$

Решение: $\sin40^0 - \sin20^0 = 2cos\frac{40^0+20^0}{2}\cdot sin\frac{40^0-20^0}{2} = 2cos30^0\cdot sin10^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot sin10^0 = \sqrt{3}sin10^0$.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
№1. Преобразуйте в произведение:		
А) $Cos50^0 + Cos20^0$; Б) Sin2α – Sin10α.	А) $Sin12^0 + Sin20^0$; Б) Cos6α - Cos3α.	А) $Sin40^0 + Sin16^0$; Б) Cos15α + Cos45α.
№2 Найти *Sinα, Cosα* и *tgα*, если известно, что		
$tg\frac{\alpha}{2} = 5$.	$tg\frac{\alpha}{2} = 2$.	$tg\frac{\alpha}{2} = 3$.
№3. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $tg\frac{\alpha}{2}$, если		

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{1}{3}, 2\pi < \alpha < 3\pi.$	$\text{Cos}\,\alpha = \frac{1}{4}, -\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}.$	$\text{Cos}\,\alpha = -\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Контрольные вопросы

1.Определение числовой единичной окружности.
2.Определение синуса, косинуса числа.
3.Основные тригонометрические тождества.
4. Формулы сложения.
5. Формулы удвоения.
6. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.
7. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Практическое занятие № 29

Тема: Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления обратных тригонометрических функций.

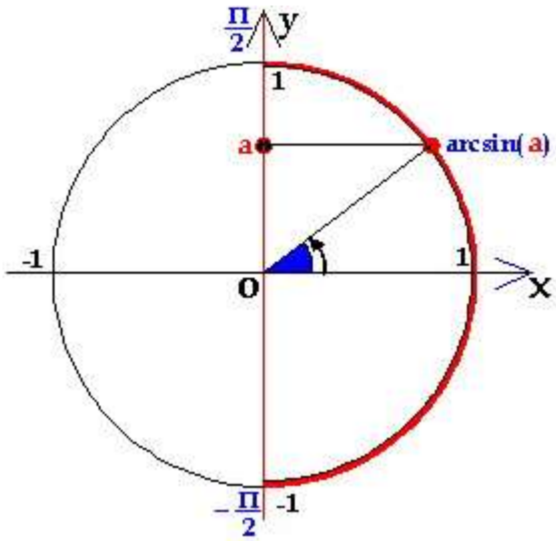
Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Обратные тригонометрические функции:



Определение: Арксинусом числа **a** называется угол из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу **a**.

Свойство арксинуса от отрицательного угла :$arcsin(-a) = -arcsin(a)$

Аналогично дается определение арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.

Определение:Аркосинусом числа **а** называется угол из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен числу **а**.

Свойство арккосинуса от отрицательного угла :$arccos(-a) = \pi - arccos(a)$

Определение:Арктангенсом числа **а** называется угол из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу **а**.

Свойство арктангенса от отрицательного угла :$arctg(-a) = -arctg(a)$

Определение:Арккотангенсом числа **а** называется угол из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен числу **а**.

Свойство арккотангенса от отрицательного угла :$arcctg(-a) = \pi - arcctg(a)$
Дополнительные свойства обратных тригонометричесикх функций:

$Sin(arcsin(a)) = a$, если $|a| \leqslant 1$;

$Cos(arccos(a)) = a$, если $|a| \leqslant 1$;

$tg(arctg(a)) = a$, если $a \in R$;

$ctg(arcctg(a)) = a$, если $a \in R$;

$arcsin(sinx) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$arccos(cosx) = x$, если $x \in [0;\pi]$;

$arctg(tg) = x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

$arcctg(ctgx) = x$, если $x \in (0;\pi)$

Примеры вычислений

- 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- 2) $\arcsin 0=0$, так как $\sin 0=0$ и $0\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$ так как $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример : Сравните $\arcsin\frac{1}{2}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Решение: т.к. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$, а значит $\arcsin\frac{1}{2}<\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Задание для самостоятельной работы:

1.Вычислите:а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3})$; г) $\mathrm{arcctg}\,1$; д) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
е) $\arccos(-2)$;

2.Сравните числа: а) $\arcsin\frac{1}{2}$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\mathrm{arctg}\,1$;
в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3. Вычислите значение выражения: а) $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;
б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $2\,\mathrm{arctg}\,1+3\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;
г) $\arccos\left(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}\right)-2\arcsin 1$; д) $\frac{12}{\pi}\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\pi}{12}\right)$; е) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}+\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$.

Контрольные вопросы:

1. Понятия обратных тригонометрических функций?
2. Свойства обратных тригонометрических функций?

Практическое занятие № 30

Тема: Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления тригонометрических функций.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

1. Решите уравнение $\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ 2) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ 3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2. Решите уравнение *cos2x = 0*.

1) $\tilde{o} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$; *2)* $\tilde{o} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; *3)* $\tilde{o} = \frac{\pi}{2} n, n \in Z$; *4)* $\tilde{o} = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

3. Решите уравнение *ctg² x = 3.*

1) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$ *2)* $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$ *3)* $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$ *4)* $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

4. Решите уравнение *-3sinx = 0.*

1) πm, m∈Z; 2) 2 πm, m∈Z; 3) $\frac{\pi m}{-3}$*, m∈Z; 4)* $\frac{2\pi m}{-3}$*, m∈Z.*

5. Решите уравнение $tg\frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ 3) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ 4) $\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

6. Решите уравнение $cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 0$.

1) x=π+πk, k∈ Z; 2) x=$\frac{\pi}{2}$*+πk, k∈ Z; 3) x=2πk, k∈ Z; 4) x=π+2πk, k∈ Z.*

7. Решите уравнение $ctg\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

1) x=π+2πk, k∈ Z; 2) x=-πk, k∈ Z; 3) x= -$\frac{\pi}{2}$*+πk, k∈ Z; 4) x=2πk, k∈ Z.*

8. Решите уравнение $sinx - sin^2 x = cos^2 x$.

1) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 2) $x=2\pi k,\ k\in Z$; 3) $x=\pi k,\ k\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

9. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\cos(-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) 0 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{3\pi}{4}$

10. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\sin(-x)=\frac{1}{2}$.

1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{5\pi}{6}$

11.Решите уравнение $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

1) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 2) $2\pi k,\ k\in Z$ 3) $\pi k,\ k\in Z$ 4) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$

12. Решите уравнение $2\cos\frac{x}{2}=1$.

1) $(-1)^n\cdot\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$

13.Решите уравнение $sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

1) $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; 3) $x=\pi k,\ k\in Z$; 4) $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

14. Решите уравнение $sinx - \frac{\sqrt{3}}{3}cosx = 0$.

1) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

15. Решите уравнение $ctg\left(\frac{\pi}{2}x-\pi\right)=1$.

1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; 2) $\frac{1}{2}+2k, k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; 4) $\frac{1}{2}+k, k\in Z$.

16. Решите уравнение $\cos^2 x-\sin^2 x=-\frac{1}{2}$.

1) $\pm\frac{5\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; 3) $\pm\frac{5\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; 4) $\pm\frac{5\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

17. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2\sin 5x}+1=0$.

1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{15}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ 2) $(-1)^{n}\frac{\pi}{15}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ 4) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

18. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3x}+1=0$.

1) $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ 2) $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ 3) $(-1)^{n+1}\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$ 4) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

19. Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos\frac{x}{7}-3=0$.

1) $(-1)^{n}\frac{7\pi}{6}+7\pi n, n\in Z$ 2) $\pm\frac{7\pi}{6}+14\pi n, n\in Z$

3) $(-1)^{n}\frac{7\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

20. Решите уравнение $2\sin 5x-\sqrt{2}=0$.

1) $(-1)^{n}\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{20}+2\pi n, n\in Z$

3) $(-1)^{n}\frac{\pi}{20}+\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}, n\in Z$

21. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 5\pi x-1{,}5=0$.

1) $(-1)^{n}\frac{1}{15}+\frac{n}{5}, n\in Z$ 2) $(-1)^{n}\frac{5}{3}+5n, n\in Z$ 3) $\pm\frac{1}{15}+\frac{n}{5}, n\in Z$ 4) $\pm\frac{1}{15}+\frac{2n}{5}, n\in Z$

22. Решите уравнение $\sqrt{2}\cos 4\pi x+1=0$.

1) $(-1)^{n+1}\frac{1}{16}+\frac{n}{4}, n\in Z$ 2) $(-1)^{n+1}\frac{1}{16}+\frac{n}{2}, n\in Z$ 3) $\pm\frac{3}{16}+\frac{n}{2}, n\in Z$ 4) $\pm\frac{3}{4}+2n, n\in Z$

23. Решите уравнение $\left(2\sin\frac{x}{3}-1\right)(\cos 3x-2)=0$.

1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+3\pi n, n\in Z$

3) $(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 4) $(-1)^{n}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

24. Решите уравнение $\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)(\sin 5x+2)=0$.

1) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi n, n\in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

Практическое занятие № 31

Тема: Контрольная работа №2 по теме “Основы тригонометрии”

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления тригонометрических функций.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по темам тригонометрии.
2. Решите контрольную работу. Оформите решение письменно в тетради.

1 вариант

1. Вычислите: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\mathrm{arctg}(-1)$
2. Вычислите: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\mathrm{arcctg}(\sqrt{3})$
3. Решите уравнение: $\sin x - \frac{1}{2} = 0$

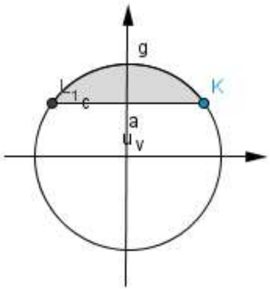
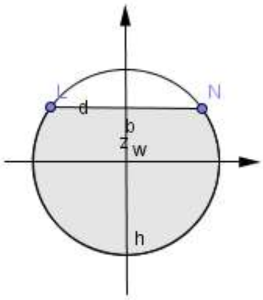
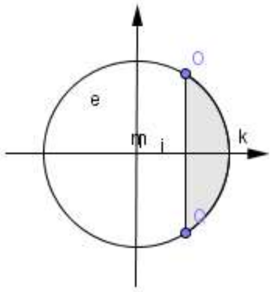
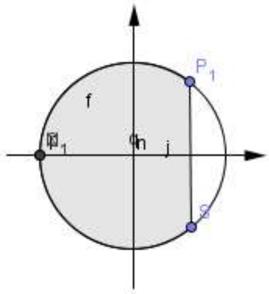
4. Решите уравнение: $\cos 2x=1$

15. Укажите уравнение, которому соответствует решение:

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$:

1) tg x = 1; **2)** cos x = 0; **3)** sin x = -1; **4)** ctg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. На каком из рисунков показано решение неравенства: cos x < $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

1)  **2)**  **3)**  **4)** 

7. Решите уравнение: $6\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

8. Решите уравнение: $\left(2\sin\frac{x}{3} - 1\right)(\cos 3x - 2) = 0$.

9. Представив 105^0 как $60^0 + 45^0$, вычислите $\sin 105^0$.

10. Упростите:

$$tgt \cdot \cos(-t) + \sin(\pi + t)$$

2 вариант

1. Вычислите: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0{,}5\,\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$

2. Вычислите: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

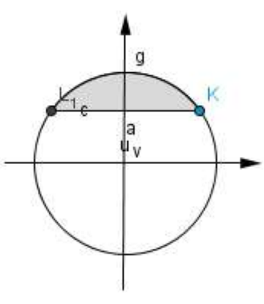
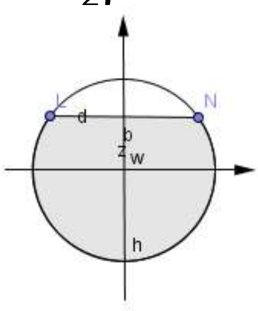
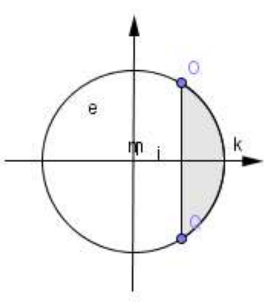
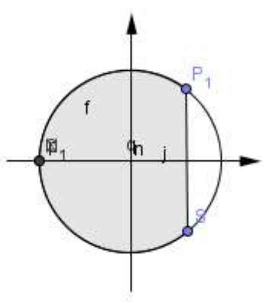
3. Решите уравнение: $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

4. Решите уравнение: $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

5. Укажите уравнение, которому соответствует решение: $x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$:

1) ctg x = -1; **2)** cos x = 0; **3)** cos x = -1; **4)** tg x = 1.

6. На каком из рисунков показано решение неравенства: sin x ≥ $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

1)  **2)**  **3)**  **4)** 

7. Решите уравнение: $\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)\left(\sin 5x+2\right)=0$.

8. Решите уравнение: $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

9. Представив 15^0 как $45^0 – 30^0$, вычислите cos 15^0.

1**0**. Упростите:

$$ctgt\cdot\sin(-t)+\cos(2\pi-t)$$

Контрольные вопросы:

1. Понятия обратных тригонометрических функций?
2. Свойства обратных тригонометрических функций?
3. Понятие тригонометрии?
4. Тригонометрические уравнения, неравенства?
5. Основные тригонометрические тождества?

Практическое занятие № 32

Тема: Графическая интерпретация**.**

Цель: рассмотреть понятия «график функции», «функциональная зависимость», основные примеры функциональной зависимости

Теоретический материал

График функции

Функция и график функций - это понятия, которые используются практически в каждой области знаний. С функциональной зависимостью каждый из нас сталкивается даже тогда, когда просматривает прогноз погоды, поскольку на многих сайтах показывают график зависимости температуры от времени или дней. Во многих группах в социальных сетях можно просмотреть статистику посещений группы - все это объясняет математика, а именно функции.

Чтобы задать функцию на координатной плоскости, необходимо задать произвольное значение аргумента, по которому рассчитать значение функции. Если таких точек на плоскости будет задано бесконечное множество, то мы получим график заданной функции. Чем ближе будут браться точки друг к другу, тем точнее будет график.

Функциональная зависимость - форма устойчивой взаимосвязи между объективными явлениями или отражающими их величинами, при которой изменение одних явлений вызывает определенное количественное изменение других. Объективно Ф. з. проявляется в виде законов и отношений, обладающих точной количественной определенностью. Они могут быть в принципе выражены в виде уравнений, объединяющих данные величины или явления как функцию и аргумент. Ф. з. может характеризовать связь:

1) между свойствами и состояниями материальных объектов и явлений;

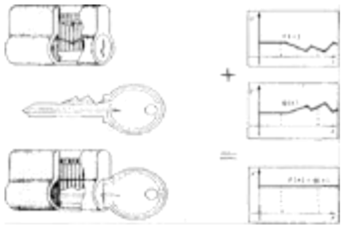
2) между самими объектами, явлениями или же материальными системами в рамках целостной системы более высокого порядка;

3) между объективными количественными законами, находящимися в отношении субординации, в зависимости от их общности и сферы действия;

4) между абстрактными математическими величинами множествами, функциями или структурами, безотносительно к тому, что они выражают.

Ключ к небольшой математической проблеме

Отметим, что не всякую функциональную зависимость удается выразить краткой формулой, мы не случайно в качестве примера предоставляем вам, ключ от дверного замка: сейчас он в буквальном смысле слова послужит ключом к небольшой математической проблеме, к которой нас подводит беседа о функциях. Знаете ли вы, как таким ключом открывается дверной замок? Что происходит внутри этого слесарно-механического устройства, когда вы вставляете ключ в замочную скважину и делаете положенное число оборотов?



Чтобы замок открылся, нужно провернуть барабан, в котором сделана скважина. Но этому препятствуют штифты, стоящие тесным строем внутри скважины, скользящие вверх-вниз. Каждый из штифтов нужно поднять на такую высоту, чтобы их верхние торцы оказались вровень с поверхностью барабана. Если они выступят за нее, то войдут в прорезь обоймы, расположенную точно над заочной скважиной; если не достигнут поверхности барабана, то из прорези обоймы находящиеся там штифты вдвинутся в замочную скважину. И в том и в другом случае вращение барабана будет застопорено.

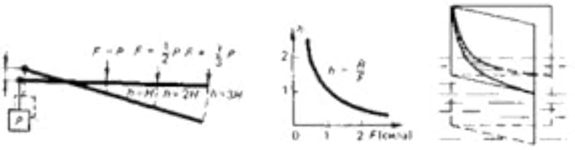
Штифты в замочной скважине поднимает ключ, вдвигаемый в нее. При этом высота каждого штифта, будучи сложена с высотой профиля ключа в соответствующей точке, должна дать в сумме диаметр барабана. Только тогда он провернется.

Ну а причем здесь функция? Да притом, что, с точки зрения математика, вся эта механика есть не что иное, как операция сложения двух функций. Одна из них — это профиль ключа. Другая — линия, очерчивающая верхние торцы штифтов, когда замок заперт.

Операция сложения функций состоит в том, что в каждой точке из общей области их определения к значению одной функции прибавляется значение другой.

Золотое правило механики

Вся богатейшая семья механизмов, окружающих современного человека, начиналась когда-то с семи простых машин. Древние знали рычаг, блок, клин, ворот, винт, наклонную плоскость и зубчатые колеса. Эти нехитрые по теперешним представлениям устройства умножали силу человека. Но, во сколько раз выиграешь в силе — во столько же раз проиграешь в расстоянии. Так гласит золотое правило механики, заключающее в себе теорию семи простых машин.



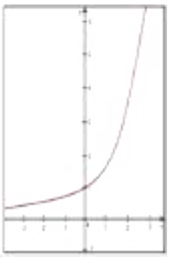
График, приведенный на этой странице, есть наглядное выражение знаменитого правила. По горизонтальной оси отложена сила, с которой, например, нужно давить на плечо рычага, чтобы поднять заданный груз на заданную высоту. По вертикальной оси — расстояние, которое пройдет при этом точка приложения силы. Линия, выражающая такую функциональную зависимость, называется гиперболой.

Закон обратной пропорциональности глядит на нас и со шкалы радиоприемника. Вы крутите ручку настройки, и стрелка движется вдоль шкалы, на которой два ряда чисел — метры и мегагерцы, длина волн и их частота. Длина волн растет, частота падает. Но присмотритесь: при любом сдвиге стрелки во сколько раз увеличилась длина волны, во столько же раз упала частота.

График гиперболы можно увидеть на лабораторном столе физика, демонстрирующего явления капиллярности. В штативе несколько тонких стеклянных трубочек, расположенных в порядке возрастания диаметров. Известно, что в тонком канале смачивающая жидкость поднимается тем выше, чем меньше его диаметр. Поэтому в самом узком канале жидкость поднялась выше всего, в другом канале, диаметр которого в два раза больше, — в два раза ниже, в третьем, что толще первого в три раза, — в три раза ниже и так далее.

Информационный бум

Сейчас много говорят об информационном буме. Поток информации захлестывает: утверждают, что ее количество удваивается каждые десять лет. Изобразим этот процесс наглядно, в виде графика некоторой функции.



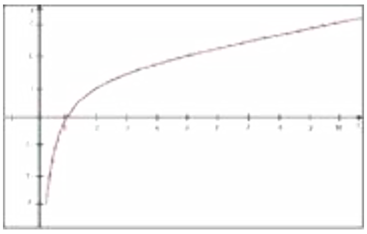
Примем объем информации в некоторый год за единицу. Поскольку эта величина послужит нам началом дальнейших построений, отложим ее над началом координат, в которых будет строиться график, по вертикальной оси. Отрезок, вдвое больший, восставим над единичой отметкой горизонтальной оси, считая, что эта отметка соответствует первому десятку лет.

Еще вдвое больший отрезок восставим над точкой «два», соответствующей второму десятку, еще вдвое больший — над точкой «три». Декада за декадой— избранные нами значения аргумента выстроятся по горизонтальной оси в порядке равномерного нарастания, по закону арифметической прогрессии: один, два, три, четыре... Значения функции отложатся над ними, возрастая каждый раз вдвое, — по закону геометрической прогрессии: два, четыре, восемь, шестнадцать...

Звездный график

Сколько звезд на небе? Одним из первых, кто попытался точно ответить на этот вопрос, был древнегреческий астроном Гиппарх. При его жизни в созвездии Скорпиона вспыхнула новая звезда. Гиппарх был потрясен: звезды смертны, они, как люди, рождаются и умирают. И чтобы будущие исследователи могли следить за возникновением и угасанием звезд, Гиппарх составил свой звездный каталог. Он насчитал около тысячи звезд и разбил их по видимому блеску на шесть групп. Самые яркие Гиппарх назвал звездами первой величины, заметно менее яркие — второй, еще столь же менее яркие — третьей и так далее в порядке равномерного убывания видимого блеска — до звезд, едва видимых невооруженным глазом, которым была присвоена шестая величина.

Когда ученые получили в свое распоряжение чувствительные приборы для световых измерений, стало возможным точно определять блеск звезд. Стало возможным сравнить, насколько соответствует данным таких измерений традиционное распределение звезд по видимому блеску, произведенное на глаз.Оценки того и другого рода сведем на одном графике. От каждой из шести групп, на которые звезды распределил Гиппарх, возьмем по одному типичному представителю. По вертикальной оси будем откладывать блеск звезды в единицах Гиппарха, то есть ее звездную величину, по горизонтальной — показания приборов. С каждым шагом по шкале звездных величин прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, как могло бы показаться, а примерно в два с половиной раза. Образно говоря, глаз сравнивает источники света по блеску, задаваясь вопросом «во сколько раз?», а не вопросом «на сколько?». Мы отмечаем не абсолютный, а относительный прирост блеска. И когда нам кажется, что он возрастает или убывает равномерно, в действительности мы шагаем по его шкале все более размашистыми шагами, покрывая при этом поистине гигантский диапазон: в миллион миллионов раз различаются по блеску источники света, самый слабый и самый мощный, воспринимаемые человеческим глазом.

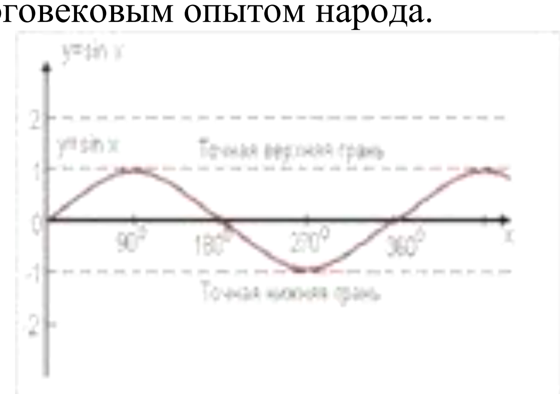


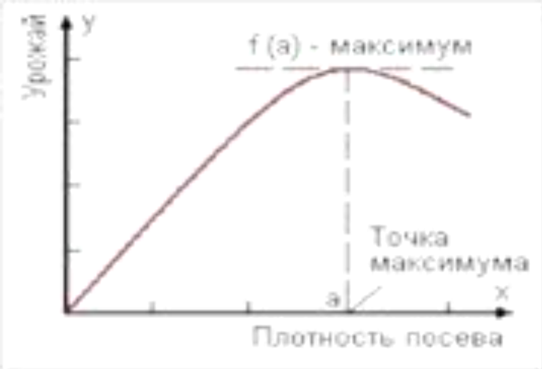
Именно в силу описанной физиологической особенности звезды, ярко горящие на ночном небе, не видны днем, тонут в ослепительном блеске солнца, рассеянном по небосводу. И там и здесь сияние звезд дает одну и ту же добавку к свету фона. Однако в первом случае (ночью) эта добавка велика по сравнению с мерцанием неба, во втором же (днем) составляет весьма незначительную долю от солнечного блеска (менее чем миллиардную даже для самых ярких звезд). Оттого же и голос солиста, когда его пение подхватывает хор, тонет в многоголосом звучании...

Математические портреты пословиц

Современная математика знает множество функций, и у каждой свой неповторимый облик, как неповторим облик каждого из миллиардов людей, живущих на Земле. Однако при всей непохожести одного человека на другого у каждого есть руки и голова, уши и рот. Точно так же облик каждой функции можно представить сложенным из набора характерных деталей. В них проявляются основные свойства функций.

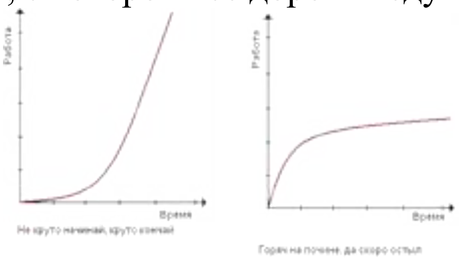
Функции — это математические портреты устойчивых закономерностей, познаваемых человеком. Чтобы проиллюстрировать характерные свойства функций, нам показалось естественным обратиться к пословицам. Ведь пословицы — это тоже отражение устойчивых закономерностей, выверенное многовековым опытом народа.





«Выше меры конь не скачет» Если представить траекторию скачущего коня как график некоторой функции, то высота скачков в полном соответствии с пословицей будет ограничена сверху некоторой «мерой». Это будет знакомый график функции синуса.

«Пересев хуже недосева» Урожай лишь до некоторой поры растет вместе с плотностью посева, дальше он снижается, потому что при чрезмерной густоте ростки начинают глушить друг друга. Эта закономерность станет особенно наглядной, если изобразить ее графиком, где урожай представлен как функция плотности посева. Урожай максимален, когда поле засеяно в меру. Максимум— это наибольшее значение функции по сравнению с ее значениями во всех соседних точках. Это как бы вершина горы, с которой все дороги ведут только вниз, куда ни шагни.



«Не круто начинай, круто кончай» **и** «Горяч на почине, да скоро остыл»

функциональный зависимость математический уравнение

Обе функции, зависящие от времени, возрастающие. Но, как видно, расти можно по-разному. Наклон одной кривой постоянно увеличивается. Рост функции усиливается с ростом аргумента. Такое свойство функции называется вогнутостью.

Наклон другой кривой неизменно уменьшается. Рост функции слабеет с ростом аргумента. Такое свойство функции называется выпуклостью.

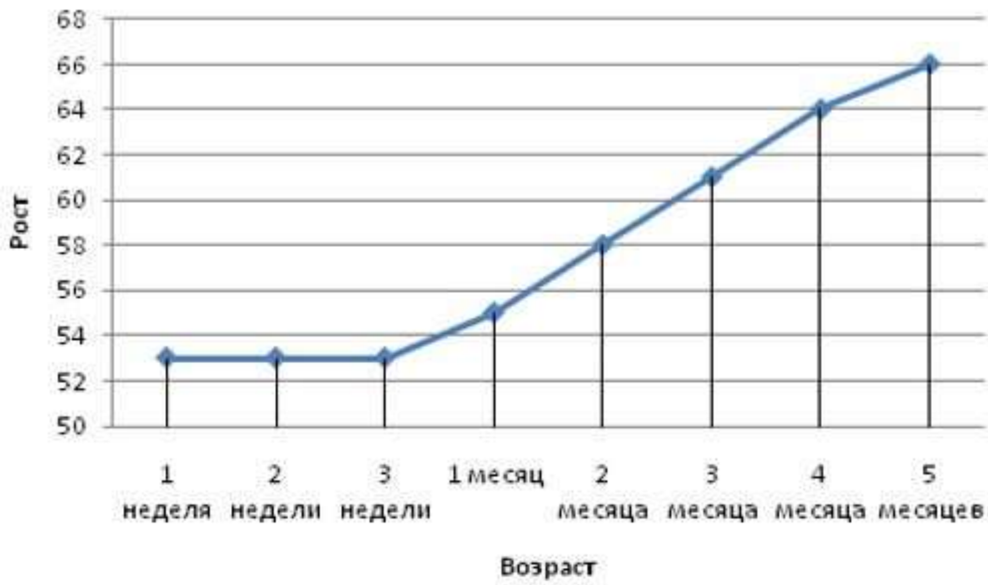
Практическая часть:

Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях

1. Давайте рассмотрим процесс развития ребенка на протяжении первых пяти месяцев жизни и запишем данные в таблицу. В результате этого получим:

Возраст	0 недель	1м.	2м.	3м.	4м.	5м.
Рост, см	53	55	58	61	64	66

А теперь давайте по оси ОУ направим рост ребенка, а по оси ОХ его возраст. В результате расстановки и соединения получившихся точек получим:



2. Достаточно ярким примером функциональной зависимости является кардиограмма. Она показывает интенсивность и частоту сокращений сердечной мышцы во времени.

3. А теперь давайте рассмотрим пример из физики. Представьте себе, что лед нагревают до температуры плавления, затем без изменения температуры происходит разрушения кристаллической решетки, то есть он начинает плавиться. После этого воду начинают нагревать до более высокой температуры, а затем начинается обратный процесс.

Все вышеописанное можно проиллюстрировать на графике:

Контрольные вопросы:

1. Функциональная зависимость?
2. Графики функций?

Практическое занятие №33

Тема: Исследование функции. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функции. Непрерывные и периодические функции.

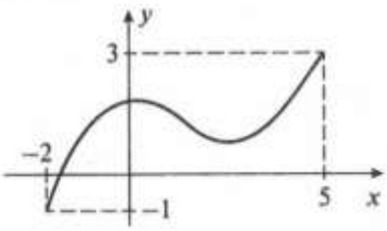
Цель: оценить знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала

Вариант 1

B1. Для функции $f(x) = 2\sqrt{1-x} - |x|$ найдите значение $f(-3)$.

Ответ: ____________________

B2. На рисунке приведен график функции $y = f(x)$. Определите длину промежутка, который является областью определения функции.



Ответ: ____________________

B3. Для функции $f(x) = 2 - 3x$, имеющей $D(f) = [-2;\ 4]$, укажите длину промежутка, который является областью значений функции.

Ответ: ____________________

B4. Найдите наименьшую величину, входящую в область значений функции

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 11.$$

Ответ: ____________________

C1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \frac{5x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

Ответ: ____________________

C2. Известно, что $f(3 - x) = 2x^2 + 3x - 1$. Найдите функцию $f(x)$.

Ответ: ____________________

Практическое занятие №34

Тема: Свойства и график и синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции

Цель: Закрепить навыки исследования тригонометрических функций.

Вариант 1

1. Постройте график функции: $y=\sin x+3$.
2. Постройте график функции: $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
3. Найдите множество значений функции $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+7$.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=-4\cos(x-\pi)-3$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\sin x+3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
6. Построить график функции *y = sin* $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ *- 2*

Вариант 2

1. Постройте график функции: $y=\cos x-2$.
2. Постройте график функции: $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$
3. Найдите множество значений функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+5$.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\cos x-1$ на отрезке $[\pi;0]$.
6. Построить график функции *y = cos* $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ *+2*

Практическое занятие № 35

Тема: Преобразования графика функции. Гармонические колебания. Прикладные задачи.

Цель: Научиться выполнять преобразования графиков функции

ВАРИАНТ 1

1. На заданных интервалах построить графики указанных функций (в одной системе координат)
2. Линии графиков сделать максимально толстыми, цвет изменить на более подходящий по смыслу
3. Удалить оси OX и OY и подписи к ним
4. Удалить легенду
5. Показать работу учителю

1) $y = -\frac{1}{16}(x+5)^2 + 2$ на промежутке [-9; -1];

2) $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5$ на промежутке [-1; 1];

3) $y = -\frac{1}{16}(x-5)^2 + 2$ на промежутке [1; 9];

4) $y = \frac{1}{4}(x+5)^2 - 3$ на промежутке [-9; -1];

5) $y = \frac{1}{4}(x-5)^2 - 3$ на промежутке [1; 9];

6) $y = 5 - (x+7)^2$ на промежутке [-9; -6]

7) $y = 5 - (x-7)^2$ на промежутке [6; 9]

ВАРИАНТ 2

1. На заданных интервалах построить графики указанных функций (в одной системе координат)
2. Линии графиков сделать максимально толстыми, цвет изменить на более подходящий по смыслу
3. Удалить оси OX и OY и подписи к ним
4. Удалить легенду
5. Показать работу учителю

1) $y = -\frac{1}{18}x^2 + 12$ на промежутке [-12; 12];

2) $y = -\frac{1}{8}(x+8)^2 + 6$ на промежутке [-12; -4];

3) $y = -\frac{1}{8}x^2 + 6$ на промежутке [-4; 4];

4) $y = -\frac{1}{8}(x - 8)^2 + 6$ на промежутке [4; 12];

5) $y = 2(x + 3)^2 - 9$ на промежутке [-4; -0,3];

6) $y = 1,5(x + 3)^2 - 10$ на промежутке [-4; 0,2]

Практическое занятие №35

Тема: «Преобразования графика функции. Гармонические колебания»

Цель работы: применить умения по выполнению преобразований графиков функций.

Задание:

I Вариант	II Вариант

1. Построить графики функций.

а) $y = \cos 2x$	а) $y = \cos\frac{x}{2}$
б) $y = tg\frac{x}{2}$	б) $y = tg 2x$
в) $y = \cos x - 1$	в) $y = 2 + \sin x$
г) $y = \lvert\sin x\rvert$	г) $y = \lvert\cos x\rvert$

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку [0; 3π] :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку [0; 3π] :

$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Практическая работа №36

Тема: Показательные, логарифмические, уравнения, тригонометрические уравнения.
Цель работы: 1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Решение показательных, логарифмических уравнений , тригонометрические уравнения».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
Оборудование: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
Порядок выполнения работы:
1. Изучить памятку для решения логарифмических уравнений и неравенств.
2. Изучить условие заданий для практической работы.

3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Оформить отчет о работе.

Памятка для решений логарифмических уравнений

$x - выражение\ с\ переменной,\ a, b - числа$, причем $a > 0, a \neq 1$

1. Уравнение вида $log_a x = b$

Решить равносильное уравнение $x = a^b$;

2. Уравнение вида $log_x a = b$

а) найти ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$;

б) решить уравнение $x^b = a$;

в) выбрать из корней уравнения $\in ОДЗ$.

3. Уравнение вида $log_a b = x$

Решить уравнение относительно переменной, входящей в выражение с переменной.

При решении логарифмических уравнений полезно помнить некоторые **свойства логарифмов**:

$a^{log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

$log_a 1 = 0$; $log_a a = 1$;

$log_a(xy) = log_a x + log_a y$; $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;

$log_a x^n = n \cdot log_a x$; $log_a \sqrt[n]{x} = \frac{log_a x}{n}$;

$log_{a^n} b = \frac{1}{n} log_a b$; $log_a b = \frac{1}{log_b a}$;

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ - формула перехода к новому основанию

Замечание: $lg\, t -$ десятичный логарифм (по основанию 10)

$ln\, t -$ натуральный логарифм (по основанию e)

При решении логарифмических уравнений применяются также методы логарифмирования и потенцирования.

Варианты практической части:

<u>Вариант 1.</u>

1.Решить уравнение: а) $log_2(x-15) = 4$; б) $lg(2x) + lg(x+3) = lg(12x-4)$;
в) $lg^2 x + 2lg\, x = 8$.

2. Решить неравенство: а) $\log_5(4x+1) > -1$

3. Решить неравенство: $4^{5-2x}<0{,}25$.

<u>Вариант 2</u>

1. Решите уравнения: а) $log_4(5x+6) = 0$; б) $log_2(4-x) + log_2(1-2x) = 2log_2 3$;
в) $log_5^2 x - log_5 x^2 = 3$.

2.Решите неравенство: $log_{0,2}(15-2x) \geq -2$.
3. Решите неравенство: $0{,}4^{2x+1} \geq 0{,}16$.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется логарифмическим?
2. Что такое неравенство? Что является решением неравенства?
3. Какое неравенство называется логарифмическим?
4. Что называется решением неравенства с одной переменной?

Практическое занятие №37

Тема: «Параллельное проектирование и его свойства. Взаимное расположение пространственных фигур»

Цель: закрепление темы «Параллельное проектирование», примеры проекций некоторых фигур.

Вариант 1

1. Каким образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости?

2. Перечислить основные свойства параллельного проектирования.

3. Если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то его проекцией будет ____.

4. Если проектируют 2 параллельные прямые ***a*** и ***b***, то их проекциями будут 2 точки, если эти прямые параллельны линии проектирования ***l***. Выполнить рисунок.

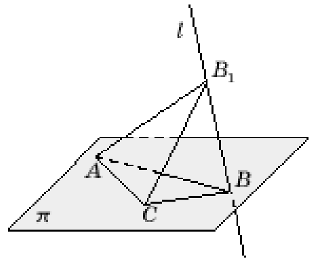
5. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться в две пересекающиеся прямые? Ответ пояснить рисунком.

Вариант 2

1. Какое соответствие называется параллельным проектированием на плоскость **β** в направлении прямой ***l***?

2. Если прямая параллельна линии проектирования, то её проекция – ______.

3. Треугольник *ABC* является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость $\boldsymbol{\pi}$ в направлении прямой ***l***. Выполнить рисунок.



4. Проекцией треугольника является отрезок, если плоскость треугольника параллельна линии проектирования ***l***. Выполнить рисунок.

5. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться в параллельные прямые? Ответ обосновать.

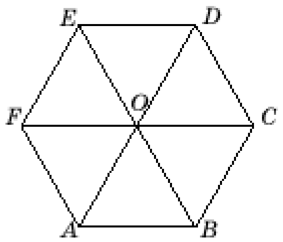
Вариант 3

1. Привести примеры параллельных проекций.

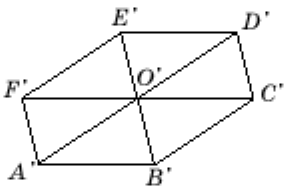
2. Если прямая не параллельна линии проектирования, то её проекция – ____.

3. Проекцией треугольника является ________, если плоскость треугольника параллельна линии проектирования ***l***.

4.Рассмотрим параллельную проекцию правильного шестиугольника *ABCDEF* с центром в точке *O* (точка *O* – точка пересечения диагоналей правильного шестиугольника). Выполнить рисунок.



Выберем какой-нибудь треугольник, например, *AOB*. Его проекцией может быть треугольник *A'O'B'* на плоскости ***π***, имеющий произвольную форму. Выполнить рисунок.



- Далее отложим *O'D'=A'O'* и *O'E'=B'O'*.

- Теперь из точек *A'* и *D'* проведем прямые, параллельные прямой *B'O'*;

- из точек *B'* и *E'* проведем прямые, параллельные прямой *A'O'*.

-Точки пересечения соответствующих прямых обозначим *F'* и *C'*.

- Шестиугольник *A'B'C'D'E'F'* и будет искомой проекцией правильного шестиугольника *ABCDEF*.

5. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться в одну прямую? Ответ пояснить рисунком.

Вариант 4

1. В чем заключается метод параллельного проецирования?

2. Какие фигуры являются параллельной проекцией треугольника?

3. Какая фигура является параллельной проекцией окружности?

4. Проекцией треугольника является произвольный треугольник, если плоскость треугольника не параллельна линии проектирования ***l***. Выполнить рисунок.

5. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться в прямую и точку на ней? Ответ пояснить рисунком.

Практическое занятие№38

Тема: Различные виды многогранников. Сечения, развертки многогранников. Виды симметрий в пространстве.

Цель работы: в ходе выполнения практической работы применить теоретические знания по выполнению арифметических действий над числами, сочетая устные и письменные приемы на практике
закрепить знания и совершенствовать умения в решении геометрических задач на пространственные фигуры.

Оснащение: инструкционная карта, линейка,карандаш.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы
2.Изучить теоретический материал.
3.Рассмотреть примеры решения упражнений.
4.По необходимости обращаться к преподавателю.
5. Оформить отчёт.

Контрольные вопросы:

1). Записать формулу нахождения для призмы.
2). Записать формулу нахождения для пирамиды.
3).Записать формулу нахождения для прямой и правильной призмы.
4). Записать формулу нахождения для правильной пирамиды.

Теоретическая часть:

1. Нарисовать параллелепипед. Записать и перечислить все вершины, ребра и грани параллелепипеда.

Решение**:**

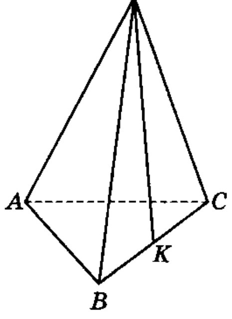
1)Вершины: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1.
2) Ребра: AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.
3) Грани: $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого 10 см и 15 см, а его боковое ребро равно 6 см. Найти параллелепипеда.

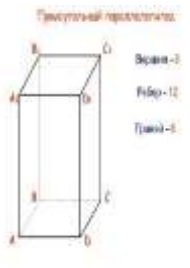
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед
$AB=10$ см, $BC=15$ см, $AA_1=6$ см
Найти:
Решение:

Ответ:

3. В основании правильной пирамиды – треугольник со стороной 12 см. Высота боковой грани равна 20 см. Найти пирамиды.



Дано: $SABC$ – правильная пирамида
$AB=12$ см, $SK=20$ см
Найти:
Решение:



Так как в основании правильный треугольник, то , отсюда следует

Ответ:

Выполнить самостоятельно:

Выполнить задания по вариантам:

Какой многоугольник с наибольшим числом сторон может получиться в сечении тетраэдра?

1.шестиугольник

2.четырехугольник

3.пятиугольник

4.треугольник

Какой многоугольник с наибольшим числом сторон может получиться в сечении n-угольной призмы?

1.n — 1-угольник

2.n + 2-угольник

3.n + 1-угольник

4.n-угольник

Может ли в сечении куба $A \ldots D_1$ плоскостью получиться квадрат?

А) да, например, сечение, проходящее через вершины куба a, a_1, c

Б) нет

В)да, это любое сечение, перпендикулярное грани куба

Г)да, это любое сечение, параллельное грани куба

Может ли в сечении куба *A…D₁* плоскостью получиться равнобедренный треугольник?
А)да, например, сечение, проходящее через вершины куба а, $а_1$, с

Б)да, например, сечение, проходящее через вершину куба a_1 и точки *e, f* — середины ребер *ав* и *вс*

В)да, например, сечение, проходящее через вершину куба $в_1$ и точки *e, f* — середины ребер *ав* и *вс*

Г)нет

Построить сечение

Треугольной пирамиды *PABC* плоскостьюα = (MKH), где MϵPC, KϵAB, HϵPB.

Четырехугольной пирамиды PABCDплоскостьюα = (MKH), где MϵPD, KϵPC, HϵPA.
Прямоугольного параллелепипеда$ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостьюα = (MKH),
где MϵBB_1, K ϵCC_1, HϵAB.
Прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α = (MKH),
где M ϵ B_1C_1, K ϵ CC_1, H ϵ AA_1

Построить развертку

трехгранной призмы
Наклонного цилиндра

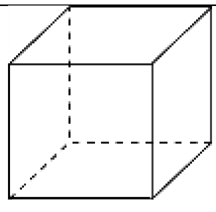
Практическое занятие № 39

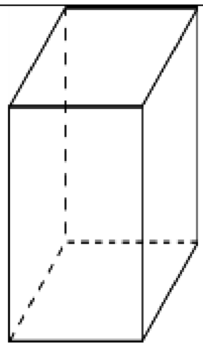
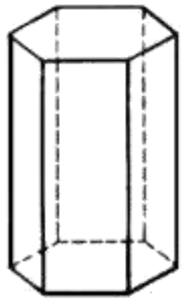
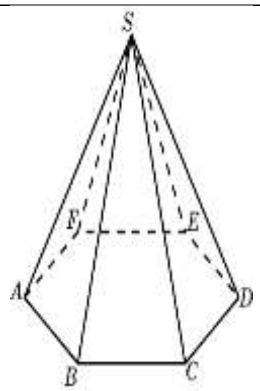
Тема: Площадь поверхности многогранников.
Цель: Знать формулы вычисления боковой и полной поверхности призмы. пирамиды, параллелепипеда и уметь применять их к решению задач.

Методические рекомендации

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Основные формулы

№ п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1.	**Куб**		$S_п = 6a^2$ $V=a^3$

2.	**Прямоугольный параллелепипед**		$S_п = 2ab + 2ac + 2ac$ **V=a*b*c** **V=$S_{осн}$*h**
3.	**Призма**		$S_б = p \cdot H$ $S_п = S_б + 2S_o$ **V=$S_{осн}$*h**
4.	**Пирамида**		$S_б = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_п = S_б + S_o$ V=(1/3)*$S_{осн}$*h

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 см и 12 см и углом 60°. Диагональ B_1D призмы образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна *a,* а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 4 см и $4\sqrt{3}$ см и углом 30°. Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Основание пирамиды – квадрат со стороной *a*. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две смежные с ней грани составляют с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 см и $6\sqrt{3}$ см и углом 150°. Диагональ B_1D призмы образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а угол между боковым ребром и основанием равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H, а боковое ребро составляет с основанием угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 3 см и 6 см и углом 120°. Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а угол между боковым ребром и основанием пирамиды равен 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Угол между диагоналями смежных граней, исходящих из одной вершины, равен α. Диагональ параллелепипеда равна d. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Практическое задание № 40

Тема: Виды симметрий в пространстве
Цель: Применить умения по владению основными понятиями пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах − владение;
Применить умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием.

Методические рекомендации

Симметрия – **это закономерная повторяемость элементов (или частей) фигуры или какого-либо тела, при которой фигура совмещается сама с собой при некоторых преобразованиях (вращение вокруг оси, отражение в плоскости).**

Понятие симметрии включает в себя такие понятия, как: *ось симметрии, центр симметрии и плоскость симметрии.*

1) Ось симметрии - воображаемая ось, при повороте вокруг которой на некоторый угол, фигура совмещается сама с собой в пространстве (А)

2) Центр симметрии - это точка внутри многогранника, в которой пересекаются и делятся пополам прямые, соединяющие одинаковые элементы многогранника (грани, рёбра, углы) (С).

3) Плоскость симметрии делит многогранник на 2 зеркально равные части (Р).

Опр. (осевая симметрия)

Точки А и A_1 называются симметричными относительно прямой *a* (ось симметрии), если прямая *a* проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой *a* считается симметричной самой себе.

Опр. (зеркальная симметрия)

Точки AA_1 называются симметричными относительно плоскости α(плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.

Опр. (зеркальная симметрия)

Точки AA_1 называются симметричными относительно плоскости α(плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.

Варианты заданий практической работы

I Вариант

1. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1. Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости (прямые a и a_1 параллельны).
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$.
3. Докажите, что при параллельном переносе на вектор p, где $p \neq 0$, прямая , не параллельная вектору p и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей прямую.

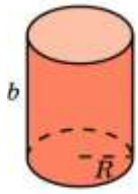
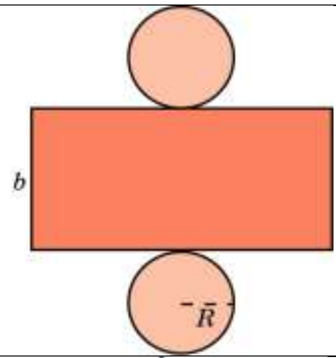
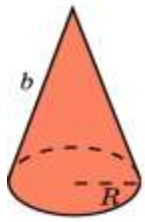
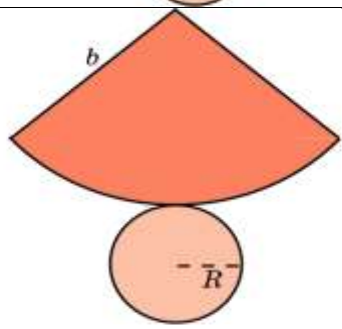
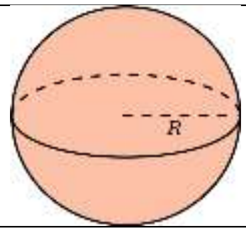
II Вариант

1. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1. Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости (прямые a и a_1 пересекаются).
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если β перпендикулярна α , то β_1 совпадает с β.
3. Докажите, что при параллельном переносе на вектор p, где $p \neq 0$, прямая , параллельная вектору p или содержащая этот вектор, отображается на себя.

Практическое занятие № 41

Тема: Симметрия тел вращений и многогранников
Цель: Знать формулы для нахождения площадей поверхностей тел вращения и уметь применять их к решению задач.

Методические рекомендации

№ п/п	Наименование фигуры	Изображение	Формула площадей полной и боковой поверхности
1.	**Цилиндр**	 	$S_{\text{б}} = 2\pi RH$ $S_{\text{п}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $S_o = \pi R^2$ $V = \pi R^2 \cdot H$
2.	**Конус**	 	$S_{\text{б}} = \pi Rl$ $S_{\text{п}} = \pi Rl + \pi R^2$ $S_o = \pi R^2$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$
3.	**Сфера, шар**		$S_{\text{п}} = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите радиус основания цилиндра.
   1) $5\sqrt{2}$ см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) 10 см; 4) $10\sqrt{2}$ см

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{\pi}$ дм^2, а площадь основания цилиндра равна 25 дм^2. Найдите высоту цилиндра.
   1) $\frac{2}{3}\pi$ дм; 2) $\frac{\pi}{2}$ дм; 3) $0{,}6\pi$ дм; 4) 2 дм

3. Длина образующей конуса равна $2\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Найдите площадь основания конуса.

   1) 8π см^2; 2) $8\sqrt{2}\,\pi$ см^2; 3) 9π см^2; 4) $6\sqrt{3}\,\pi$ см^2

4. Радиус основания конуса $3\sqrt{2}$ см. Найдите наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса.

   1) $16\sqrt{2}$ см^2; 2) 18 см^2; 3) $12\sqrt{3}$ см^2; 4) 16 см^2

5. Стороны треугольника ABC касаются шара. Найдите радиус шара, если AB =8 см, BC=10 см, AC=12 см и расстояние от центра шара O до плоскости треугольника ABC равно $\sqrt{2}$ см.

   1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) 3 см; 4) $3\sqrt{2}$ см

2 вариант

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 36 см. Найдите радиус основания цилиндра.

   1) 9 см; 2) 8 см; 3) $8\sqrt{3}$ см; 4) $9\sqrt{2}$ см

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна $12\sqrt{\pi}$ дм^2, а площадь основания равна 64дм^2. Найдите высоту цилиндра.

   1) $\frac{\pi}{2}$ дм; 2) $0{,}75\pi$ дм; 3) $\frac{5\pi}{6}$ дм; 4) 3 дм

3. Высота конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Найдите площадь основания конуса.

   1) $120\sqrt{2}\,\pi$ см^2; 2) 136π см^2; 3) 144π см^2; 4) $24\sqrt{3}\,\pi$ см^2

4. Радиус основания конуса равен $7\sqrt{2}$ см. Найдите наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса.

   1) $54\sqrt{2}$ см^2; 2) 35 см^2; 3) $21\sqrt{2}$ см^2; 4) 98 см^2

5. Стороны треугольника MKN касаются шара. Найдите радиус шара, если MK = 9 см, MN= 13 см, KN = 14 см и расстояние от центра шара O до плоскости MKN равно $\sqrt{6}$ см.

   1) $4\sqrt{2}$ см; 2) 4 см; 3) $3\sqrt{3}$ см; 4) $3\sqrt{2}$ см

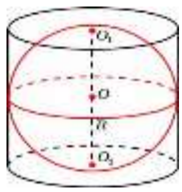
Практическое занятие № 42

Тема: Вычисление площадей и объемов

Цель: Знать формулы для нахождения объемов многогранников и тел вращения и уметь их применять их к решению задач.

1 вариант

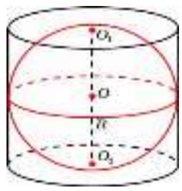
1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 9. Объем параллелепипеда равен 81. Найдите высоту цилиндра.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 8,5. Найдите его объем.
3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.
4. Объем конуса равен 112. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.
5. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



.

2 вариант

1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Объем параллелепипеда равен 5. Найдите высоту цилиндра.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6,5. Найдите его объем.
3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 14.
4. Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.
5. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 24. Найдите площадь поверхности шара.



Практическое занятие №43

Тема: Числовая последовательность , способы её задания, вычисление членов последовательности

Цель: научиться записывать числовые последовательности различными способами, описывать их свойства; находить пределы последовательностей и функций.

Методические рекомендации

Функция y=f (n) натурального аргумента n (n=1; 2; 3; 4;...) называется числовой последовательностью.

Числовую последовательность называют *возрастающей*, если ее члены возрастают ($y_{n+1}y_n$) и убывающей, если ее члены *убывают* (y_{n+1n}).

Возрастающая или убывающая числовые последовательности называются *монотонными*.

Пусть a – точка прямой, а r – положительное число. Интервал $(a-r;a+r)$ называется окрестностью точки a, а число r − радиусом окрестности.

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу b при увеличении порядкового номера *n*. В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет предел. Это понятие имеет более строгое определение.

Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержат все члены последовательности, начиная с некоторого номера

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = b.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Теорема 1 Если $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = c$, то:

1. Предел суммы/разности двух последовательностей равен сумме/разности пределов от каждой из них, если последние существуют:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

2. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов от каждой из них, если пределы сомножителей существуют:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = bc;$$

3. Предел отношения двух последовательностей равен отношению пределов от каждой из них, если эти пределы существуют и предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c};$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n)=kb$$.

Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0$$.

Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^m}=0$$.

Теорема 2 Если $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=c$, то:

1. Предел суммы/разности двух функций равен сумме/разности пределов от каждой из них, если последние существуют:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=b+c$$;

2. Предел произведения двух функций равен произведению пределов от каждой из них, если пределы сомножителей существуют:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=bc$$;

3. Предел отношения двух функций равен отношению пределов от каждой из них, если эти пределы существуют и предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{b}{c}$$;

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to\infty}(kf(x))=kb$$.

Функцию y=f(x) называют непрерывной в точке x=a, если предел функции y=f(x) при стремлении x к a равен значению функции в точке x=a.

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$.

Первый замечательный предел: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

Варианты заданий практической работыПЗ№44

Вариант 1

Часть А

1. По заданной формуле n-го члена вычислите пять первых членов последовательности .

$y_n = \frac{(-1)^n + 2}{3n - 2}$

2. Является ли последовательность $x_n = (-1)^{n-1}$ ограниченной?
3. Является ли последовательность $x_n = 6^{1-n}$ убывающей или возрастающей?
4. Запишите окрестность точки a=-5 радиуса r=0,3 в виде интервала.
5 . Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал (1,7;2,3).

Часть В

6. Вычислите предел последовательности:

а) $x_n = \frac{8n + 4}{4n - 6}$ б) $x_n = \frac{4n^2 + 7n - 1}{2n^2 + 2}$

Часть С

7. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 1}$ б) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x^2 - 11x + 18}{x - 9}$

в) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x + 4}$ г) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2 + x}{x^3 + 8}$

Вариант 2

Часть А

1. По заданной формуле n-го члена вычислите пять первых членов последовательности $y_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$.
2. Является ли последовательность $x_n = (-1)^n (n + 1)$ ограниченной?
3. Является ли последовательность $x_n = \frac{5}{n + 3}$ убывающей или возрастающей?
4. Запишите окрестность точки a=4 радиуса r=0,1 в виде интервала.
5. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал (-2,4;-1,2).

Часть В

6. Вычислите предел последовательности:

а) $x_n = \frac{5n - 21}{6n - 2}$; б) $x_n = \frac{3n^3 + 2n - 1}{5n^3 + 2}$;

Часть С

7. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2}$ б) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt{x + 3}$

в) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3}$ г) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{16-x^2}{64-x^3}$

Вариант 3

Часть А

1. По заданной формуле n-го члена вычислите пять первых членов последовательности $y_n = (-1)^n \frac{5}{10^n}$.

2. Является ли последовательность $x_n = \frac{2n-1}{2n}$ ограниченной?

3. Является ли последовательность $x_n = (-\frac{1}{5})^{2n-1}$ убывающей или возрастающей?

4. Запишите окрестность точки а=-8 радиуса r=0,7 в виде интервала.

5. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал (5,2;6,2).

Часть В

6. Вычислите предел последовательности:

а) $x_n = \frac{n+2}{6n-3}$ б) $x_n = \frac{8n^3-2n^2+1}{4n^3+1}$

Часть С

7. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2+4x-3}{5x^2+2x+1}$ б) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2+6x-8)$

в) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x+2}{2x^2+x-6}$ г) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1+x^3}{1-x^2}$

Вариант 4

Часть А

1. По заданной формуле n-го члена вычислите пять первых членов последовательности $y_n = \frac{(-1)^n+3}{2n-1}$.

2. Является ли последовательность $x_n = (\frac{1}{3})^{n+1}$ ограниченной?

3. Является ли последовательность $x_n = \sqrt{n+8}$ убывающей или возрастающей?

4. Запишите окрестность точки а=4 радиуса r=0,6 в виде интервала.

5. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал (-6,5;-5,5).

Часть В

6. Вычислите предел последовательности:

а) $x_n = \dfrac{10n - 20}{2n + 5}$ б) $x_n = \dfrac{10n^3 + 8n - 1}{2n^3 + 9}$

Часть С

7. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^2 + 5x + 2}{6x^2 + 5x - 3}$ б) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 5}{x^2 + 5x}$

в) $\lim\limits_{x \to 3,5} \sqrt{2x - 6}$ г) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^3 - 27}$

Практическое задание №45

Тема: Производная: механический и геометрический смысл производной. Уравнения касательной в общем виде.

Цель: Отработать механический и геометрический смысл производной

Методические рекомендации

Физический (механический) смысл производной

$$S'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

v(t)=t³ - 2t

k=tga= f'(x₀)

Варианты заданий практической работы

Вариант 1

Задание: Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t)$. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени t_0.

1. $S(t) = t^3 + 4t^2$, $t_0 = 1$. **2.** $S(t) = 7t^3 - 2t^2$, $t_0 = 2$.
3. $S(t) = t^3 + 3t^2$, $t_0 = 2$. **4.** $S(t) = 4t^3 + 3t^2 - 2t$, $t_0 = 1$.
5. $S(t) = 2t^3 - 5t^2$, $t_0 = 3$. **6.** $S(t) = 5t^3 - 2t^2$, $t_0 = 2$.
7. $S(t) = 2t^3 + t^2$, $t_0 = 4$. **8.** $S(t) = 3t^3 + 7t^2$, $t_0 = 3$.
9. $S(t) = 5t^3 + 2t^2 - 3$, $t_0 = 1$. **10.** $S(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5$, $t_0 = 2$.
11. $S(t) = t^3 + 8t^2 + 1$, $t_0 = 3$. **12.** $S(t) = 6t^3 + t^2 - 1$, $t_0 = 4$.

Вариант 2

Задание: Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t)$. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени t_0.

1. $S(t) = 3t^3 - t^2 + 2t$, $t_0 = 2$. **2.** $S(t) = 2t^3 + 5t^2 - 3$, $t_0 = 5$.
3. $S(t) = 10t^3 + t^2 - 3$, $t_0 = 1$. **4.** $S(t) = 7t^2 + 2t + 3$, $t_0 = 4$.
5. $S(t) = 2t^4 + 7t^3 - t$, $t_0 = 1$. 6. $S(t) = 5t^3 + 8t^2 + 3$, $t_0 = 2$.
7. $S(t) = 9t^2 - 3t + 5$, $t_0 = 3$. **8.** $S(t) = 12t^2 + t - 1$, $t_0 = 4$.
9. $S(t) = 9t^3 + 5t^2 - t$, $t_0 = 1$. **10.** $S(t) = t^3 + 5t^2 - 4$, $t_0 = 3$.
11. $S(t) = 3t^4 + 5t^2 + 1$, $t_0 = 2$. 12. $S(t) = 2t^3 + 9t^2 - 5$, $t_0 = 4$.

Практическое занятие № 45

Тема: Производная: Механический и геометрический смысл производной .Уравнение касательной в общем виде.

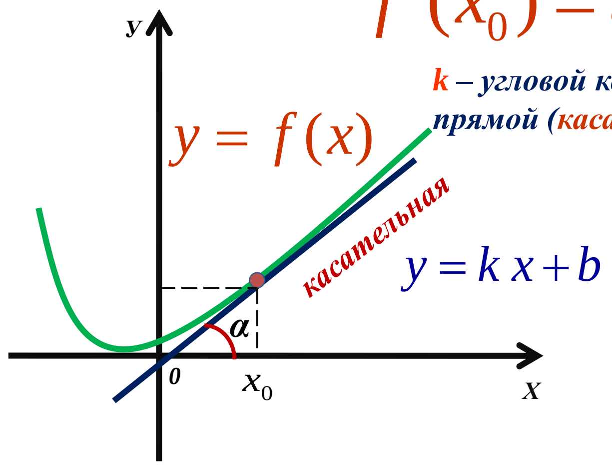
Цель: Отработать умения применять геометрический смысл производной при решении различных видов задач.

Методические рекомендации

Геометрический смысл производной

$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

***k* – угловой коэффициент прямой (касательной)**



***Геометрический смысл производной:* если к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0 можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(x_0)$ выражает угловой коэффициент касательной, т.е.** $f'(x_0) = k$

Поскольку $k = tg\alpha$ ***, то верно равенство*** $f'(x_0) = tg\alpha$

Применение производной	Алгоритм
I. Составление уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$	1. Найти значение функции $f(x_0)$. 2. Найти производную функции $f'(x)$. 3. Найти значение производной в т. x_0 : $f'(x_0)$. 4. Составить уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

<u>Пример</u>

а) Для функции $f(x) = x^3 - 5x^2$ составить уравнение касательной в точке $x_0 = 2$.

Решение.

1. $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 = 8 - 20 = -16$
2. $f'(x) = (x^3 - 5x^2)' = 3x^2 - 10x$
3. $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 12 - 20 = -8$
4. $y = -16 - 8(x - 2)$

   $y = -16 - 8x + 16$

   $y = -8x$ - искомое уравнение.

Правила дифференцирования и таблица производных основных функций.

<u>Правила.</u>

1. $C' = 0$
2. $x' = 0$
3. $(U \pm \vartheta)' = U' \pm \vartheta'$
4. $(U \cdot \vartheta)' = U' \cdot \vartheta + U \cdot \vartheta'$
5. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
6. $\left(\frac{U}{\vartheta}\right)' = \frac{U' \cdot \vartheta - U \cdot \vartheta'}{\vartheta^2}$

<u>Производные основных элементарных функций.</u>

1. $\left(x^{n}\right)' = n\cdot x^{n-1},\ n\neq 0$

2. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

3. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

4. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\cdot \ln a$

5. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x\cdot \ln a}$

6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

8. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$

9. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$

10. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

11. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

12. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

13. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

Варианты заданий практической работы

В заданиях выберите правильный ответ среди предложенных, обозначенных буквами А, Б, В.

1 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $y=\dfrac{1}{3}x^{3}+\dfrac{1}{2}x^{2}-5x-2$ в точке $A\left(2;-7\dfrac{1}{3}\right)$.

   А) 30°; Б) 45°; В) 60°

2. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x)=\sin^{2} x-\cos^{2} x$ и $g(x)=x^{2}-3x+1$ соответственно в точках $A\left(\dfrac{\pi}{6};-\dfrac{1}{2}\right)$ и $B(2;-1)$.

   А) $\alpha>\beta$; Б) $\alpha<\beta$; В) $\alpha=\beta$

3. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=2x^{3}+9x^{2}+3x-5$ равен 3?

   А) $0;-3$ Б) -3 В) $0;3$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^{2}-7x$, проходящей через точку с ординатой -6 и наименьшей абсциссой.

   А) $y=5x-36$; Б) $y=-19-36$; В) $y=-5x-1$

5. Написать уравнение касательной, проходящей через общие точки кривых $f(x)=2x^{2}-2x+3$ и $g(x)+3$.

А) $y = 2x - 1$; Б) $y = 2x + 1$; В) $y = x - 2$

2 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $y = x^3 + x^2 - 2x + 1$ в точке $A(1;2)$.

   А) 45°; Б) $71^\circ 36'$; В) $18^\circ 24'$

2. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x) = \cos^2 x - 1$ и $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ соответственно в точках $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$ и $B(2;1)$.

   А) $\alpha > \beta$; Б) $\alpha = \beta$; В) $\alpha < \beta$

3. Найти угол наклона касательной к кривой $f(x) = \left(4 - \sqrt{x}\right)^2$ в точке $x_0 = 4$.

   А) $\frac{\pi}{4}$; Б) $\frac{3\pi}{4}$; В) $-\frac{\pi}{4}$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2$, проходящей через точку с ординатой 6.

   А) $y = 12x + 4$; Б) $y = x + 4$; В) $y = 12x - 18$

1. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = x^2 - 2$ в точке $x_0 = 1$.

   А) 2; Б) $3\frac{1}{2}$; В) $2\frac{1}{4}$

3 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $y = x^3 - 2x + 10$ в точке $A(1;2)$.

   А) 25°; Б) $40^\circ 12'$; В) 45°

2. В каких точках угловой коэффициент касательной к кривой $f(x) = x^3 + 4x - 2$ равен 7?

   А) 1; Б) $-1;1$ В) -1

3. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x) = \sin^2 x + 1$ и $g(x) = x^2 - 2x$ соответственно в точках $A\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$ и $B(1;-2)$.

   А) $\alpha > \beta$; Б) $\alpha = \beta$; В) $\alpha < \beta$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+5x$, проходящей через точку с ординатой 6 и наибольшей абсциссой.

А) $y=7x-1$; Б) $y=-7x+1$; В) $y=x-1$

5. Написать уравнение касательной, проходящей через общие точки кривых $f(x)=x^2-x+4$ и $g(x)=x^2+5$.

А) $y=x-2$; Б) $y=2-4x$; В) $y=4x+2$

4 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси OX касательная к графику функции $f(x)=x^3+3x^2+5$ в точке $A(1;-2)$.

А) $6^\circ 20'$; Б) 30°; В) $83^\circ 40'$

2. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси OX касательные к графикам функций $f(x)=-(\cos^2 x-\sin^2 x)$ и $g(x)=\frac{1}{3}x^3-4$ соответственно в точках $A\left(\frac{\pi}{6};1\right)$ и $B(-2;-1)$.

А) $\alpha<\beta$; Б) $\alpha=\beta$; В) $\alpha>\beta$

3. Найти угол наклона касательной к кривой $f(x)=\left(6-\sqrt{x}\right)^2$, в точке $x_0=9$.

А) $\frac{3\pi}{4}$; Б) $\frac{\pi}{4}$; В) $-\frac{\pi}{4}$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+6$, проходящей через точку с ординатой -2.

А) $y=-12x+22$; Б) $y=12x+22$; В) $y=12x-22$

5. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=x^2+x$ в точке $x_0=2$.

А) $1\frac{3}{5}$; Б) 2; В) $1\frac{1}{5}$

Практическое занятие № 46

Тема: Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций

Цель: Отработать навыки нахождения производных функций. Уметь применять физический смысл производной к решению прикладных задач, схему исследования функции к построению графика функции, находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Методические рекомендации

Правила дифференцирования и таблица производных основных функций.

Правила.

1. $C' = 0$
2. $x' = 0$
3. $(U \pm \vartheta)' = U' \pm \vartheta'$
4. $(U \cdot \vartheta)' = U' \cdot \vartheta + U \cdot \vartheta'$
5. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
6. $\left(\dfrac{U}{\vartheta}\right)' = \dfrac{U' \cdot \vartheta - U \cdot \vartheta'}{\vartheta^2}$

Производные основных элементарных функций.

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \ n \neq 0$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Применение производной	Алгоритм
I.Построение графика функции $y = f(x)$	5. Найти область определения функции $D(f)$. 6. Исследовать функцию на четность, нечетность. 7. а) найти точки пересечения с осью OX (если возможно), для этого достаточно решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ б) найти точки пересечения с осью OY, для этого решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ 4. Найти $f'(x)$ и решить уравнение $f'(x) = 0$. 5. Найти интервалы монотонности и экстремума

	функции. 6. Найти дополнительные точки. 7. Построить график функции.
II.Нахождение наибольшего, наименьшего значения функции на отрезке.	1. Найти производную функции $f'(x)$. 2. Найти критические точки решив уравнение $f'(x)=0$. 3. Вычислить значение функции в критических точках, принадлежащих данному промежутку. 4. Вычислить значение функции на концах отрезка. 5. Среди всех полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

<u>Примеры</u>

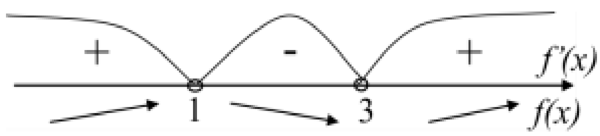
а) Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$ на отрезке $[0;4]$.
Решение.

1. $f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x+5\right)'=3x^2-12x+9$
2. $f'(x)=0$; $3x^2-12x+9=0$; $x^2-4x+3=0$; $D=16-12=4$; $x_1=1$; $x_2=3$
3. $x=1\in[0;4]$; $f(1)=1-6+9+5=9$;
   $x=3\in[0;4]$; $f(3)=27-54+27+5=5$
4. $f(0)=5$; $f(4)=64-96+36+5=9$
5. $f_{íàèá.}=f(1)=f(4)=9$.б

б) Исследовать и построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$.
Решение.

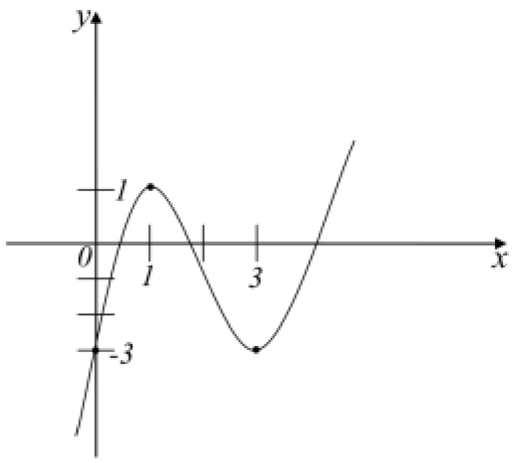
1. Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$
2. $f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x-3\right)'=3x^2-12x+9$
3. $f'(x)=0$; $3x^2-12x+9=0$
   $x^2-4x+3=0$
   $D=16-12=4>0$, 2 корня
   $x_1=3$; $x_2=1$

4; 5.



$x=1$ - т. максимума; $x=3$ - т. минимума

6. $f(1)=1-6+9-3=1$
   $f(3)=27-54+27-3=-3$
   т. $A(1;1)$, т. $B(3;-3)$
7. $x=0$, тогда $y=-3$, т. $C(0;-3)$
8.



Физический смысл первой производной.

Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость движения $\vartheta(t)$ в момент времени *t* есть производная пути по времени, т.е.

$$\vartheta(t) = \frac{dS(t)}{dt} = S'(t)$$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^2 \cdot \sin 2x$; б) $y = \sqrt{\sin^3 3x - 1}$; в) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

2. При движении тела по прямой, расстояние S (в метрах) изменяется по закону $S(t) = t^2 + t + 2$. Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость будет равна $5 м/с$?
3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?

   $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; $g(x) = 7{,}5x^2 - 16x$

4. Построить график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[0;2]$.

2 вариант

1. Найдите производную функции

а) $y = x^3 \cdot \sin \frac{x}{3}$; б) $y = \sqrt{1 + 7tg 2x}$; в) $y = \frac{x^2}{1 - x^3}$

2. При движении тела по прямой, расстояние S (в метрах) изменяется по закону $S(t) = 0?5t^2 - 4t + 6$. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?
3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?

$f(x)=x^3-3x^2$; $g(x)=1{,}5x^2-9$

4. Построить график функции $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-x^3+3x+1$ на отрезке $[-3;0]$.

3 вариант

1. Найти производную функции

а) $y=x^2\cdot\cos 3x$; б) $y=\sqrt{1-8\sin\dfrac{x}{8}}$ в) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x}$

2. При движении тела по прямой, расстояние S (в метрах) изменяется по закону $S(t)=3t^3-6t-1$. Найти скорость тела через $2c$ после начала движения.
3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?

   $f(x)=x^3-5x^2$; $g(x)=x^3-10x$

4. Построить график функции $y=\dfrac{x^2-5}{x^2+5}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2-\dfrac{7}{4}$ на отрезке $[-1;2]$.

4 вариант

1. Найти производную функции

а) $y=x^3\cdot\cos\dfrac{x}{3}$; б) $y=\sqrt{\cos^5\dfrac{x}{5}-1}$; в) $y=\dfrac{x^2-1}{4-8x}$

2. Тело движется по прямой по закону $S(t)=3t^3-2t-3$. В какой момент времени скорость тела будет равна $34\,м/с$?
3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?

   $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+5x$; $g(x)=x^3+2x^2$

4. Построить график функции $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2+1$ на отрезке $[1;3]$.

Практическое занятие №46

Тема: Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций.
Цель: Отработать навыки вычисления производных функций.
1) Опорный конспект.

Пример 1. Найти производную функции y = $2^x \cdot x^2$.
Решение: По свойству дифференцирования произведения,
$y' = (2^x \cdot x^2)' = (2^x)' \cdot x^2 + 2^x \cdot (x^2)'$.
Используя формулу для нахождения производной показательной и степенной функций, получим: $y' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x = 2^x \cdot x(x \ln 2 + 2)$
Ответ: $y' = 2^x \cdot x(x \ln 2 + 2)$.

Пример 2. Найти производную функции y = $\frac{3x-1}{2x+5}$.
Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)' = \frac{(3x-1)' \cdot (2x+5) - (3x-1) \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^2}.$$

Производная суммы/разности равна сумме/разности производных и константу можно выносить за знак производной, поэтому имеем:

$$y' = \frac{\left[(3x)' - (1)'\right] \cdot (2x+5) - (3x-1) \cdot \left[(2x)' + (5)'\right]}{(2x+5)^2},$$

$$y' = \frac{3 \cdot (2x+5) - (3x-1) \cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{6x + 15 - 6x + 2}{(2x+5)^2} = \frac{17}{(2x+5)^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{17}{(2x+5)^2}$.

Пример 3. Найти производную функции y = $\frac{\cos x}{x^3+1}$.
Решение: По правилу дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^3+1}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot (x^3+1) - \cos x \cdot (x^3+1)'}{(x^3+1)^2},$$

$$y' = \frac{(-\sin x) \cdot (x^3+1) - \cos x \cdot \left[(x^3)' + (1)'\right]}{(x^3+1)^2} = \frac{-\sin x \cdot (x^3+1) - 3x^2 \cdot \cos x}{(x^3+1)^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{-\sin x \cdot (x^3+1) - 3x^2 \cdot \cos x}{(x^3+1)^2}$.

Пример 4. Вычислить производную функции y = cos ln ($3x^2 - 2$).
Решение: Примените таблицу основных производных и формулу производной сложной функции.

$y' = -\sin \ln (3x^2 - 2) \cdot (\ln (3x^2 - 2))' = -\sin \ln (3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2-2} \cdot (3x^2 - 2)' =$
$= -\sin \ln (3x^2 - 2) \cdot \frac{6x}{3x^2-2}$. **Ответ:** $-\sin \ln (3x^2 - 2) \cdot \frac{6x}{3x^2-2}$.

Задания к практической работе

1. Найдите производную функции $y = e^{-x} - 2x^7$, $y = 4x^3 + e^{-x}$.
2. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.
   Найдите производную функции $y = \sin x\, e^x - 9x^3$ в точке $x_o = 0$.
3. Найдите значение производной функции $y = 5\cos x - 7x$ в точке $x_o = 0$.
4. Вычислите значение производной функции $y = \ln(2x+11) + 5x$ в точке $x_o = -5$.

5. Найдите производную функции:

а) $y(x) = 3\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2})$; б) $y = 5^{-3x} + \ln(2 + 5x)$.

6. Найдите производную функции *$y=4x^3+e^{-x}$*.
1) $y'=12x^2+e^{-x}$ **;** *2) $y'=12x^2-e^{-x}$* **;** *3) $y'=x^4-e^{-x}$***;** *4) $y'=12x^2-xe^{-x-1}$*

7. Найдите производную функции *$y = \sin x\, e^x - 9x^3$* в точке *$x_o=0$. 1) 0; 2) - 1; 3) 1; 4) -9.*

Практическое занятие№ 47

Тема: «Исследование функций с помощью производной ».

Цель: Проверить на практике умение находить промежутки возрастания и убывания функции,экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты функции, применять полученные знания при построении графика функции и исследовании функции по общей схеме.

Вариант – 1.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^x - x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 6x^2$+9x+3.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на
промежутке $[2;3]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.

Вариант – 2.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{2x}{e^x}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = -x^3 - 3x^2$+24x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на промежутке $[-1;2]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
$y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100$.

Вариант – 3.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = 2xe^x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x^2$-9x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на промежутке $[-2;2]$.

4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$.

Вариант – 4.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^{\frac{1}{x}} + 1$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = -x^3 + 6x^2$+15x+1.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на промежутке $[-4; 4]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции

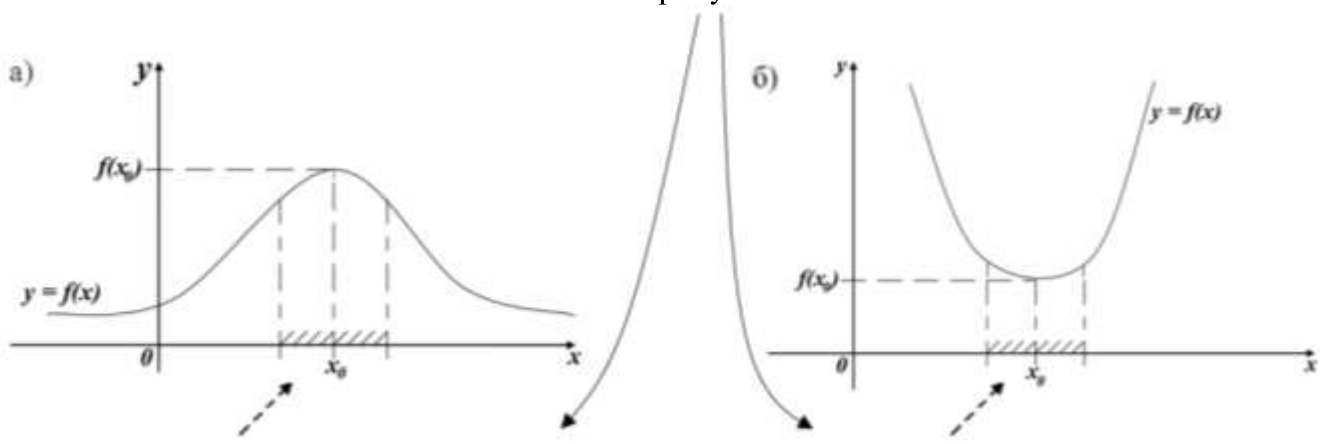
Практическое занятие № 48

Тема: Нахождение наибольшего , наименьшего значения и экстремальных значений функции.

Цель: Отработать навыки нахождения точек максимума и минимума, промежутков возрастания и убывания функции, используя график функции и график производной функции.

Методические рекомендации

О. Точка экстремума



О. Точка максимума
для всех x, $f(x) \geq f(x_0)$

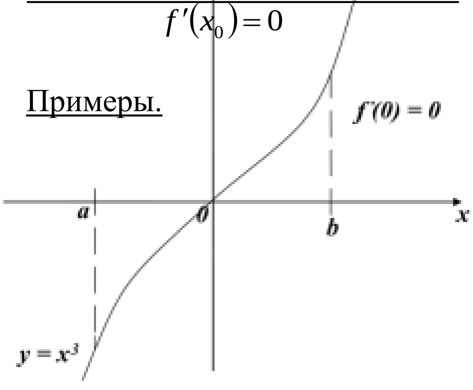
О. Точка минимума
для всех x, $f(x) \leq f(x_0)$

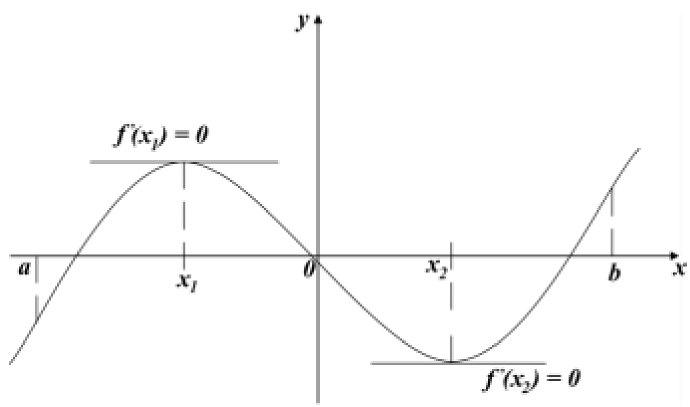
Т. (необходимое условие экстремума)
1. $f(x)$ определена в окрестности точки x_0
2. $f'(x)$ существует
3. x_0 - точка экстремума

$$f'(x_0) = 0$$

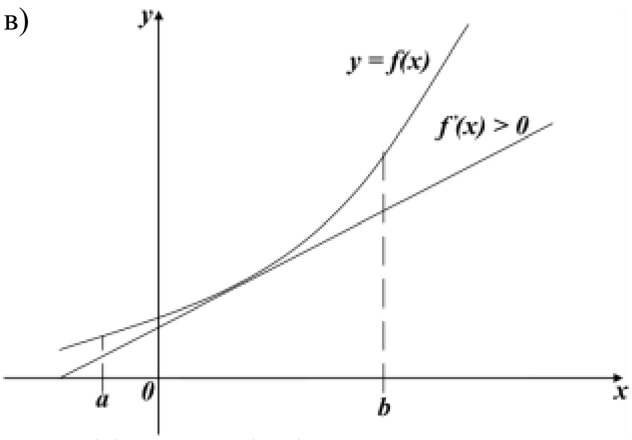
О. Стационарная точка $f(x)$
1. $x_0 \in D(f)$
2. корень $f'(x) = 0$

Примеры.





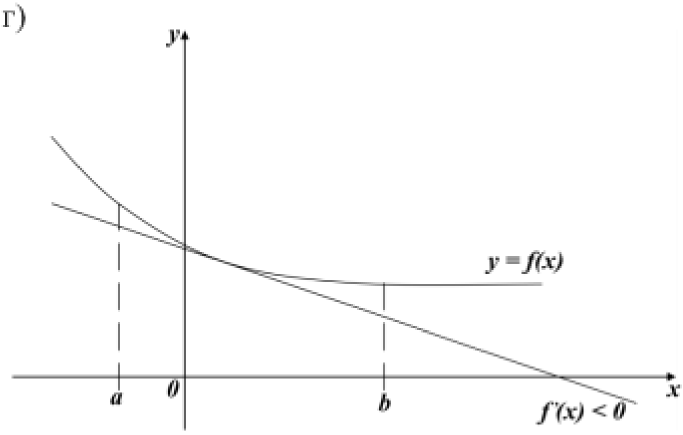
в)



Т. $f'(x) > 0$, $x \in (a;b)$

$f(x)$ возрастает на $(a;b)$

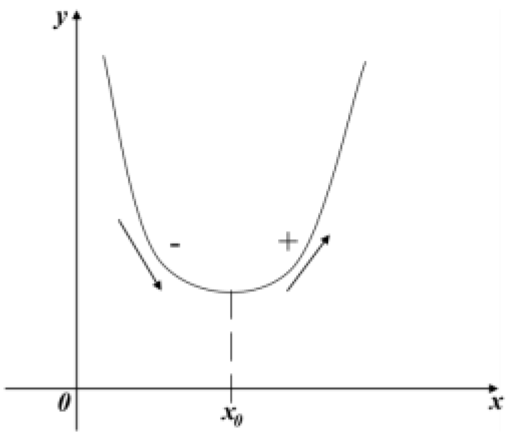
г)



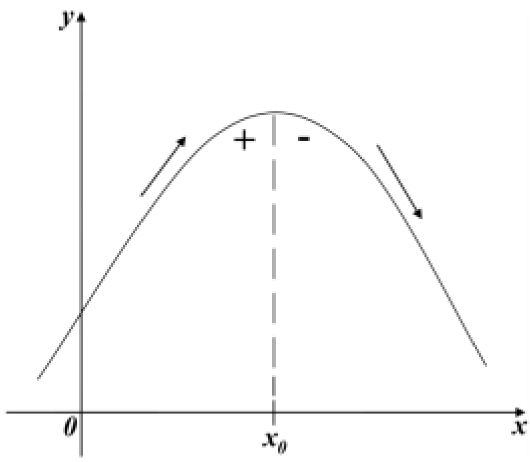
Т. $f'(x) < 0$, $x \in (a;b)$

$f(x)$ убывает на $(a;b)$

д)



е)



Теорема.

1. $f'(x) = 0$, x_0 - стационарная точка

2. слева от x_0 $f'(x) < 0$
справа от x_0 $f'(x) > 0$

↘↗ x_0 - точка минимума

2. слева от x_0 $f'(x) > 0$
справа от x_0 $f'(x) < 0$

↗↘ x_0 - точка максимума

Применение производной	Алгоритм
I. Нахождение интервалов монотонности функции	1. Вычислить $f'(x)$ данной функции $f(x)$. 2. Найти критические точки, для этого решить

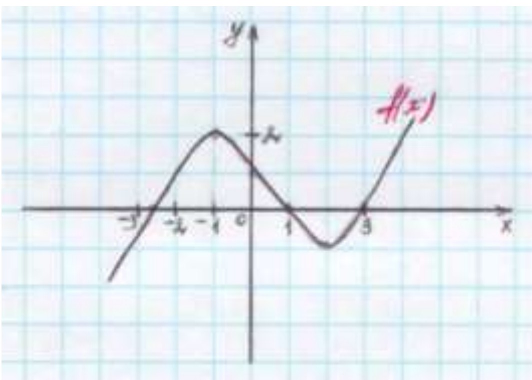
$y=f(x)$	уравнение $f'(x)=0$. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. На каждом из интервалов определяем знак производной. Для этого берем произвольное число из рассматриваемого интервала и подставляем в производную функции. По знаку ответа определяем знак производной. 5. По знаку производной делаем вывод о возрастании, убывании функции.
II. Исследование функции на экстремум	1. Найти производную функции $f'(x)$. 2. Решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. 5. а) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «+» на «-», x_0 - точка <u>максимума</u>; б) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то т. x_0 - точка <u>минимума</u>.

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[-2;8]$ меняет свой знак в точке $x=0$, при этом $f'(0)>0$. Поэтому данная функция на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке … .
2. Если $f'(x)>0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x)=3x+\cos x$; $g(x)=x^2+5x+\cos 2x$;
   $h(x)=-3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-4x+\pi$ убывающей является … .
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:

функция $g(x)$ убывает на промежутках …
функция $g(x)$ возрастает на промежутках …
функция $g(x)$ имеет точки максимума …

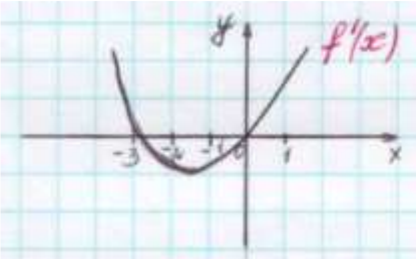


5. Дан график функции $f(x)$:

$f'(x)>0$ на промежутках …

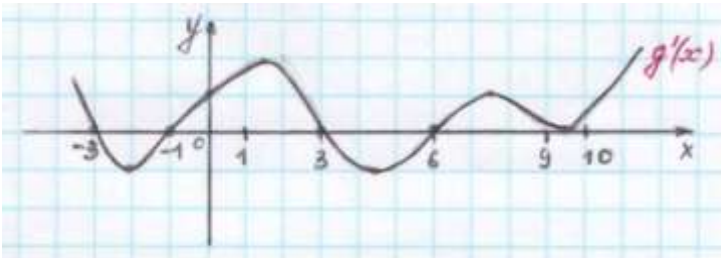
$f'(x) < 0$ на промежутках …
точки максимума функции $f(x)$ …
точки минимума функции $f(x)$ … .

6. Дан график производной функции $f(x)$



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$…

7. Дан график производной функции $g(x)$:



точки максимума функции $f(x)$ …
точки минимума функции $f(x)$…

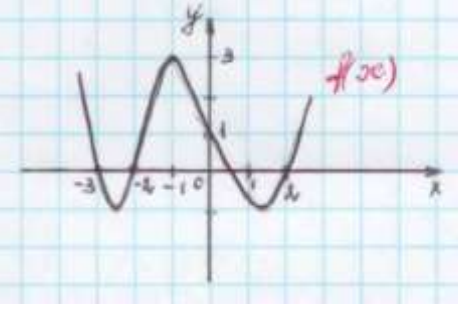
8. Функция $h(x) = -\frac{1}{x^3}$… точек экстремума, так как …

2 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[-4;2]$ меняет свой знак в точке $x = -1$, при этом $f'(-1) < 0$. При этом данная функция на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке … .
2. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x) = 2x + \sin x$; $g(x) = x^3 + 4x$; $h(x) = -x^2 - 7x + \pi$, возрастающей является … .
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:

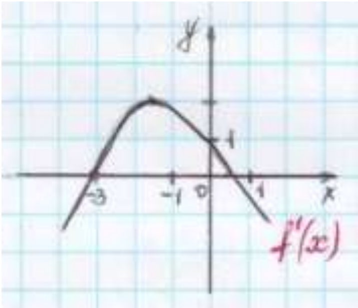
функция $g(x)$ убывает на промежутках …
функция $g(x)$ возрастает на промежутках …
функция $g(x)$ имеет точки минимума …

5. Дан график функции $f(x)$:



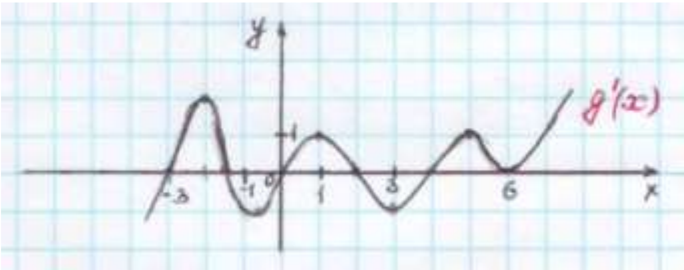
$f'(x) > 0$ на промежутках …
$f'(x) < 0$ на промежутках …
точки максимума функции $f(x)$ …
точки минимума функции $f(x)$ …

6. Дан график производной функции $f(x)$:



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$ …

7. Дан график производной функции $g(x)$:



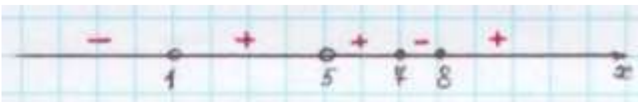
точки максимума функции $g(x)$ …

точки минимума функции $g(x)$ …

8. функция $h(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ … точек экстремума, так как …

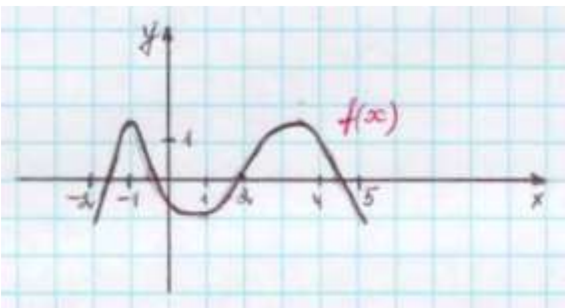
3 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[1;5]$ меняет свой знак в точке $x=3$, при этом $f'(3)>0$. Поэтому на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке …
2. Если $f'(x)>0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x)=2x+\cos x$; $g(x)=x^2+3x+\cos 2x$; $h(x)=-3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2x$ убывающей является … .
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:



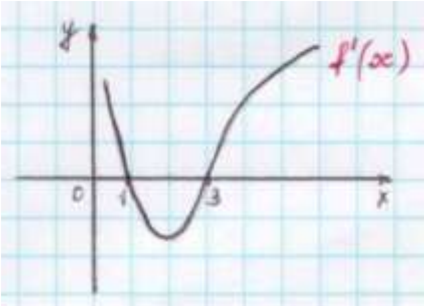
функция $g(x)$ убывает на промежутке …
функция $g(x)$ возрастает на промежутке …
функция $g(x)$ имеет точки максимума …

5. Дан график функции $f(x)$:



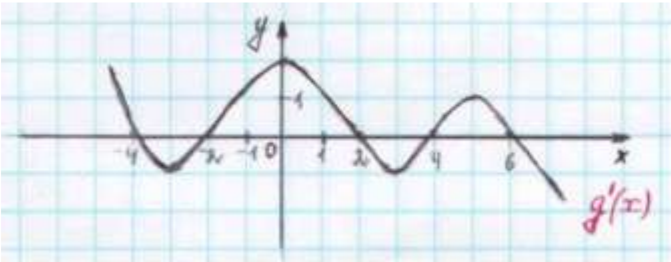
$f'(x)>0$ на промежутках …
$f'(x)<0$ на промежутках …
точки минимума функции $f(x)$ …

6. Дан график производной функции $f(x)$:



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$ …

7. Дан график производной функции $g(x)$:



точки максимума функции $g(x)$ …
точки минимума функции $g(x)$ …

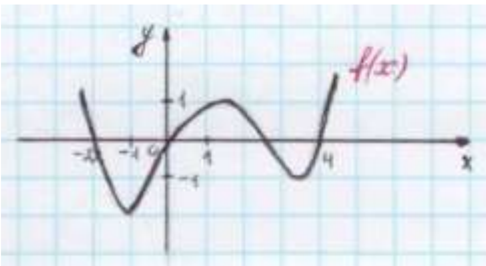
8. Функция $h(x) = x^2 - 2x + 1$ … точек экстремума, так как …

4 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[-3;4]$ меняет свой знак в точке $x = 0$, при этом $f'(0) < 0$. Поэтому данная функция на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке … .
2. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x) = 2x + \sin x$; $g(x) = x^3 + 3x$; $h(x) = -x^2 - 5x + 8$ возрастающей является …
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:

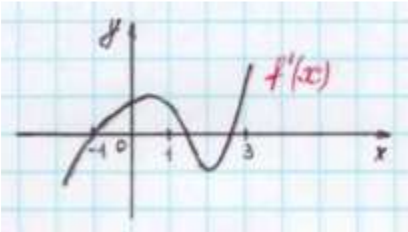
функция $g(x)$ убывает на промежутке …
функция $g(x)$ возрастает на промежутке …
функция $g(x)$ имеет точки минимума …

5. Дан график функции $f(x)$:



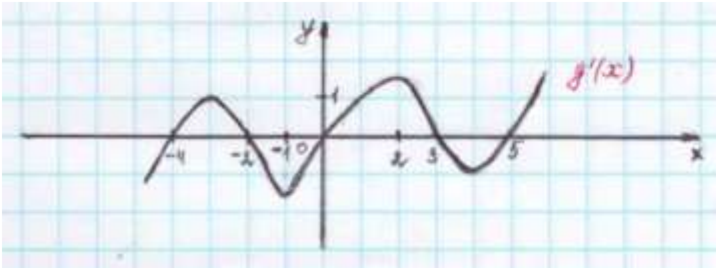
$f'(x) > 0$ на промежутках …
$f'(x) < 0$ на промежутках …
точки максимума функции $f(x)$ …

6. Дан график производной функции $f(x)$:



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$ …

7. Дан график производной функции $g(x)$:



точки максимума функции $g(x)$ …

точки минимума функции $g(x)$ …

8. Функция $h(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$ … точек экстремума, так как …

Практической задание №44

Тема: Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
Цель: Выработать умения вычислять пределы последовательностей ;вывести формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии; выработать практические навыки применения этой формулы при решении задании.

Методические Рекомендации

Теорема Вейерштрасса. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Теорема о пределах

1. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности:
$\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:
$\lim\limits_{n\to\infty}(k(a_n)) = k\lim\limits_{n\to\infty}(a_n);$
3. Предел суммы равен сумме пределов:
$\lim\limits_{n\to\infty}((a_n)+(b_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n);$
4. Предел произведения равен произведению пределов:
$\lim\limits_{n\to\infty}((a_n)(b_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(b_n);$
5. Предел частного равен частному пределов:
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_n)}{(b_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$, при условии что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$ и $(b_n)\neq 0$ для любого n
6. Предел степени равен степени предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\right)^m,$ где $m \in N.$

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Последовательность(x_n) называется **бесконечно малой**, если её предел равен нулю,

$$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 0$$

.

(*Пример* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, последовательность ($x_n$):1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots$,- бесконечно малая)
Последовательность(x_n)называется **бесконечно большой**, если для любого положительного числа M , как бы велико оно ни было, существует такой номер N , что для всех (x_n) с номерами n>N справедливо неравенство | x_n | >M .

То есть, последовательность называется **бесконечно большой**, если её предел равен бесконечности,

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=\infty$$
.

(*Пример* $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, последовательность ($z_n$):1,2,3,4,5,…,n,… бесконечно большая).
Заметим, что если последовательность (x_n) является бесконечно малой (бесконечно большой), то $\frac{1}{|x_n|}$ - бесконечно большая (бесконечно малая).
<u>*Примеры*</u>. $а)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$;
$б)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-17}{n^3}\right)$;

.

<u>Сумма бесконечной геометрической прогрессии</u>

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $b_1,b_2,b_3,\dots,b_{n,\dots}$
Пусть $S_1=b_1$,
$S_2=b_1+b_2$,
$S_3=b_1+b_2+b_3$,
……………………
$S_n= b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$.
Получилась последовательность S_1, $S_2,S_3,\dots,S_n,\dots$ Как всякая последовательность она может сходится или расходится. Если последовательность S_nсходится к пределу S, то число S называют суммой геометрической прогрессии.
Пусть надо найти сумму n первых членов геометрической прогрессии: $S_n= b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$.,то

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

.Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q|<1$.
Наедём: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{b_1}{1-q}\left(\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}q^n\right)=\frac{b_1}{1-q}(1-0)=\frac{b_1}{1-q}$.
(Так как $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, если $|q|<1$)
Поэтому $S=\frac{b_1}{1-q}$ для $|q|<1.$

Варианты заданий практической работы
Вариант №1

1.Вычислить предел последовательности:

a) Lim $\frac{3n+2}{}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ldots}{n}$

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-n+7}{n^5+3n^2+2}$

в) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+6n-7}{2n^2-3n+4}$

г) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^3-n+11}{n^2+7n-5}$

д) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{12n^5+21n^2-2n+1}{24n^5+13n^6-2}$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-12x+9}{x^2+4x+4}$

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x+1)^2}{x^2+5x+1}$

з) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n^3+2n+1}{x^2+5x+1}$

и) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2-20n-3}{n^3-n+1}$

к) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n}{n-1}$

2. Найдите Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:
1) 0,4; 0,04; 0,004; 0,0004…
2)0,17; 0,0017; 0,000017…
3)0,054; 0,0054; 0,00054…
4) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{36}$…

Вариант №2

1.Вычислить предел последовательности:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-7}{2x}$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+3x}{2x^5-7x^3}$

в) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2-6n+8}{4n^2+2n+6}$

г) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n^3-3n+17}{3n^3-61n+1}$

д) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{14n^5-23n^2+4n-1}{19n^5+13n^4-2n+8}$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-17x+11}{3x^2-21x-17}$

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(5x+1)^2}{7x^2-x+10}$

з) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-7x^2+17x-13}{7x^3-8x^2+25}$

и) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-11n-3}{7x^2-x+5}$

к) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n^2-3n}{n-2}$

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) 0,6; 0,006; 0,0006…

2) 0,13; 0,013; 0,0013…

3) 0,045; 0,0045; 0,00045…

4) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$…

Практическое занятие № 49

Контрольная работа №3

Теме: Начала математического анализа

Цель: оценить знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала

I вариант

1. Вычислите производные функций и найдите значение производной в точке $x = 1$:

1) $y = x^5 + 3x^3 - 12x^2 + \frac{4x}{9} - 18$;

2) $y = 3\sqrt[3]{2x^4} - \frac{7}{2x^{\frac{5}{2}}}$;

3) $y = \sqrt{3x-2}\sin 2x$;

4) $y =$ $y = \frac{3x^2-5}{x+1}$;

5) $y = e^{-x-1}\ln 2x$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{3\pi}{4}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4$, параллельной прямой $y = x - 4$.

II вариант

1. Вычислите производные функций и найдите значение производной при $x = -1$:

1) $y = 3x^4 - x^3 - 3\frac{x^2}{7} + 5x + 9$;   2) $y = 6\sqrt[3]{4x^2} - \frac{7}{x^3}$;

3) $y = \sqrt{4x+5}\cos 3x$;   4) $y = \frac{4x+4}{x^2-2}$;

5) $y = e^{2-x}\ln(-2x)$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin 0{,}5x$ в точке с абсциссой $x = \frac{4\pi}{3}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2$, параллельной прямой $y = 2x$.

Практическое занятие №50

Тема: Интеграл и первообразная

Цель: Отработать навыки нахождения первообразной функции, значения определенного интеграла, использования геометрического и физического смысла определенного интеграла при решении прикладных задач.

Методические рекомендации

<u>**Определение 1.**</u> Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для всех $x \in [a;b]$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

<u>Таблица интегралов.</u>

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
4. $\int e^x dx = e^x + C$,
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

9. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,
10. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,
12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$,
13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$,

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,

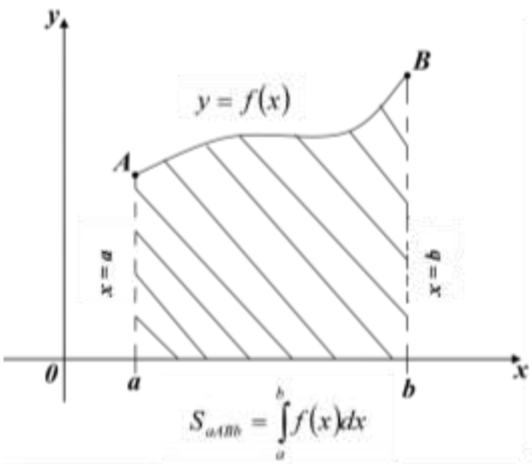
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,

14. $\int dx = x + C$,

15. $\int 0 dx = C$.

I. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть дана функция $f(x)$ непрерывная на $[a;b]$. Рассмотрим график этой функции (некоторую кривую).



- фигура $aABb$, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси *OX,* отрезками параллельных прямых $x = a$ и $x = b$, и кривой $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией.
- Если интегрируемая на $[a;b]$ функция $f(x)$ неотрицательна, то определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной $[a;b]$ оси *OX*, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиком данной функции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

II. Вычисление площадей плоских фигур.

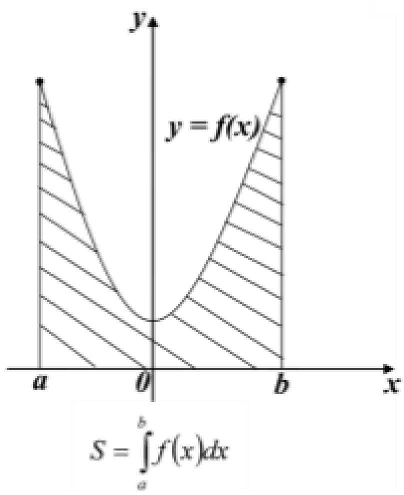
Из геометрического смысла определенного интеграла известно, что если $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

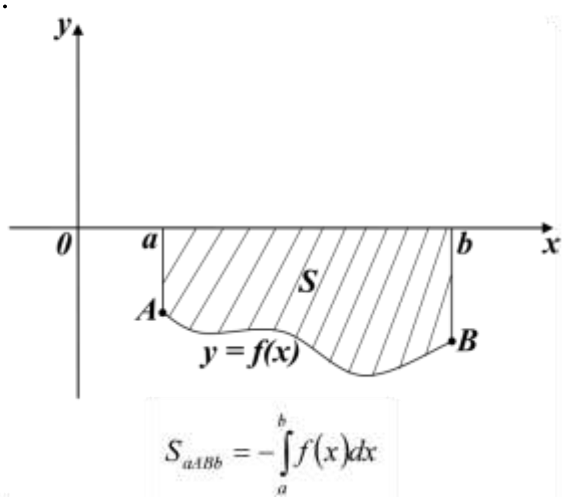
Очевидно, что если $f(x) \leq 0$, $x \in [a;b]$, то $S_{aABb} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

Рассмотрим основные случаи расположения плоских фигур:

1.

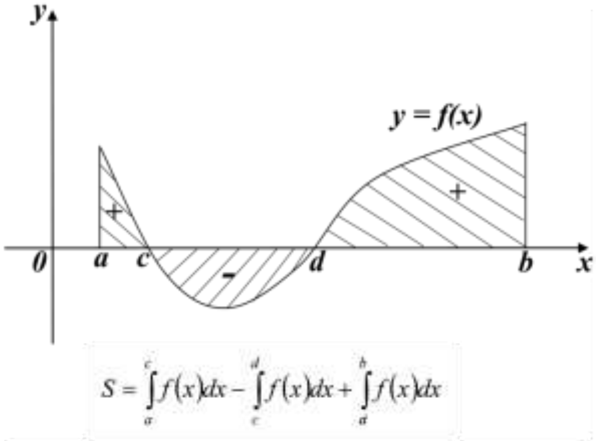


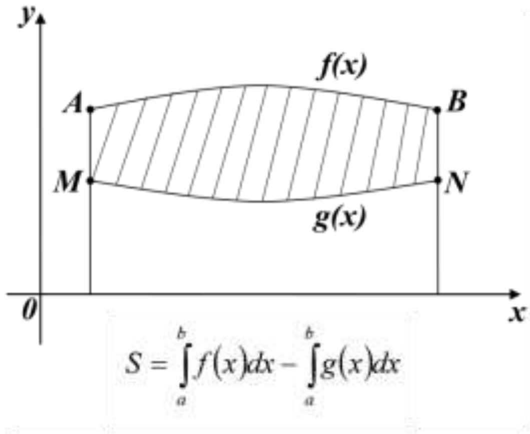
2.



3.

4.





III. Применение определенного интеграла в физике.

1. Путь, пройденный точкой при неравномерном движении за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vartheta(t)dt$$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x) = x^2 - \sin 2x - 1$ является первообразной:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \cos 2x + x$; 2) $f(x) = 2x - 2\cos 2x$;

3) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$; 3) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + x$

2. Для функции $f(x) = x^2$, найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в заданной точке $F(-1) = 2$.

1) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2\dfrac{1}{3}$; 2) $F(x) = 2x + 2\dfrac{1}{3}$; 3) $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2\dfrac{1}{3}$; 4) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2\dfrac{1}{3}$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $\upsilon(t) = t + t^2$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 3 секунд, если скорость измеряется в $м/с$.

1) $18м$; 2) $12\dfrac{1}{3}м$; 3) $17\dfrac{1}{3}м$; 4) $20м$

4. Вычислите: а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\cos^2 x}dx$; б) $\displaystyle\int_2^4 4xdx$.

а)

1) $6\sqrt{3}$; 2) 6; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{3}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+3; y=0$ б) $y=\sqrt{x};\ y=\frac{1}{2}x$

1) $4\sqrt{3}$; 3) $9\sqrt{3}$; 1) 2; 3) $2\frac{2}{3}$;

2) $6\sqrt{3}$; 4) $8\sqrt{3}$. 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{2}{3}$.

2 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+4$ является первообразной:

1) $f(x)=-\sin\frac{x}{2}-3x^2$; 3) $f(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$; 4) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}-3x^2$.

2. Для функции $f(x)=2x-2$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(2;1)$.

1) $F(x)=-x^2-2x-1$ 2) $F(x)=x^2+2x+2$; 3) $F(x)=2x^2-2$ 4) $F(x)=x^2-2x+1$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $\upsilon(t)=3+0{,}2t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 7 секунд, если измеряется в $м/с$.

1) $22{,}8м$ 2) $29м$; 3) $23м$; 4) $13м$

4. Вычислите: а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{x}{6}dx$; б) $\int\limits_{1}^{4}(x^2-6x)dx$

а)

1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}-3$; 3) 0; 4) $3-3\sqrt{3}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x^2;\ y=0;\ x=2$ б) $y=5-x^2;\ y=1;$

1) $5\frac{2}{3}$; 3) $5\frac{1}{3}$; 1) 16; 3) $11\frac{1}{3}$;

2) $2\frac{1}{3}$; 4) $2\frac{2}{3}$ 2) $5\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$

3 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x)=x^3-\sin 3x+2$ является первообразной:

1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\cos 3x$; 3) $f(x)=3x^2+\sin 3x$;

2) $f(x)=3x^2-3\cos 3x$; 4) $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cos 3x$

2. Для функции $f(x) = x^3$ найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в заданной точке: $F(1) = \frac{1}{4}$

1) $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2$; 2) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$; 3) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3$; 4) $F(x) = -\frac{x^3}{3}$

3. Скорость движения точки $\upsilon(t) = (18t - 3t^2)\,м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до остановки.

1) $108м$; 2) $92м$; 3) $36м$; 4) $20м$

4. Вычислите: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx$; б) $\int_0^2 x^3 dx$

а)

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) 1

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 - 1$; $y = 0$

1) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$;

2) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$

б) $y = x^3$; $x = 2$; $x = 0$

1) 2; 3) 4;

2) 3; 4) 1

4 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x) = x^3 - \cos 3x + 2$ является первообразной:

1) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\cos 3x$;

2) $f(x) = 3x^2 - 3\cos 3x$;

3) $f(x) = 3x^2 + 3\sin 3x$;

4) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cos 3x$

2. Для функции $f(x) = 3x^2 - 3$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(2;2)$.

1) $F(x) = -x^3 - 3x$; 2) $F(x) = x^3 + 3x - 1$; 3) $F(x) + x^3 - 3x$; 4) $F(x) = x^2 - 5$

3. Скорость движения точки $\upsilon(t) = (24t - t^2)\,м/с$. Найдите путь. Пройденный точкой за третью секунду.

1) $10м$; 2) $32м$; 3) $108м$; 4) $24м$

4. Вычислите: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$; б) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

а)

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 0

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 + 1;\ x = 0;\ x = 1$ | б) $y = 4 - x^2;\ y = 0$

1) $\frac{2}{3}$;	3) $\frac{4}{3}$;	1) $\frac{16}{3}$;	3) $\frac{1}{3}$;
2) 1;	4) 2	2) 1;	4) $\frac{32}{3}$

Практическое занятие№50

Тема: Интеграл и первообразная

Цель: Научить применять свойства интеграла и первообразной при решении задач.

Методические комбинации

1. Под дифференцированием функции $f(x)$ мы понимаем нахождение производной $f'(x)$.

2. Нахождение функции $f(x)$ по заданной ее производной $f'(x)$ называют операцией интегрирования.

3. Таким образом, операция интегрирования обратно операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$.

4. Функцию $F(x)$называют первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке , если для всех *x* из этого промежутка *F'(x)=f'(x).*

5. Множество всех первообразных для функции f(x) можно представить в виде $F(x) + C$, где $C \in R$.

Основные свойства первообразной функции.

6.*Теорема* . Если функция *F(x)* есть первообразная для функции *f(x)* на промежутке X то при любой постоянной функция *F(x)+C* также является первообразной для функции *f(x)* на промежутке X . любую первообразную функции *f(x)* на промежутке X можно записать в виде *F(x)+C*.

7. Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции *f (x)* получаются с помощью параллельного переноса любого из этих графиков вдоль оси *OУ.*

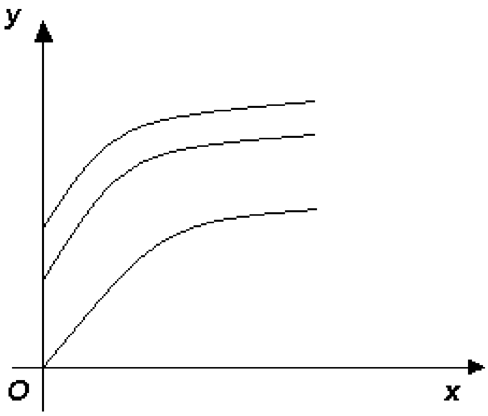


Таблица первообразных

Общий вид первообразных

k (постоянная)

kx+c

$x^n\ (n \in Z, n \neq -1)$

$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} + c$

$\sin x$

$-\cos x + c$

$\cos x$

$\sin x + c$

$\frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{tg} x + c$

$\frac{1}{\sin^2 x}$

$-\operatorname{ctg} x + c$

$\frac{1}{x}$

$\ln|x| + c$

e^x

$e^x + c$

a^x

$\frac{a^x}{\ln a} + c$

Задания к практической работе

*Задача 1.*Найти все первообразные функции

а) $f(x) = \sin(3x + 2)$ *г)*$f(x) = e^{\frac{x+2}{3}}$

б) $f(x) = (\cos\frac{x}{3} - 2)$ *д)* $f(x) = \frac{1}{2x+2}$

в) $f(x) = e^{3x} + \sin 2x$ *е)* $f(x) = \sqrt{\frac{x}{6}} + 3\cos(4x+1)$

ж) $f(x) = \sin x \cos x$

Задача 2. Найти первообразную для функции $f(x) = \sqrt{x}$ график которой проходит через точку P(9; 1)

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

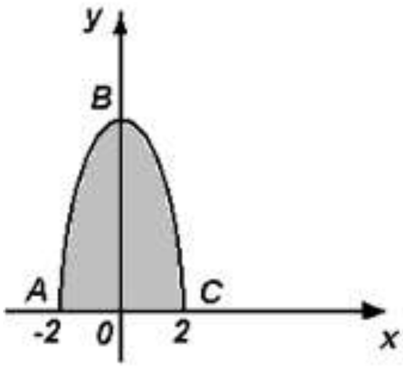
$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = 0$

Задача 4.(Физическая задача). Тело движется прямолинейно со скоростью, изменяющейся по закону $v = 2t$(м/с). Найти закон движения тела, если известно, что за первые две секунды оно прошло15м.

*Задача 5.*Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и параболой $y = 4 - x^2$

Решение. Находим пределы интегрирования : $4 - x^2 = 0$, $x = \pm 2$, тогда

$a = -2$, $b = 2$.



Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$, осью OX и графиком функции $y = f(x)$.

a=1 , b=8 , $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Практическое занятие №51

Тема: Теорема Ньютона-Лейбница

Цель: Научиться применять теорему Ньютона Лейбница.

Методические комбинации

Теорема: Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и пусть F(x) есть какая - либо её первообразная. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

С точки зрения геометрии определенный интеграл - это ПЛОЩАДЬ. Площадь криволинейной трапеции можно находить по формуле Ньютона-Лейбница

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Фигура ограничена графиком функции *y=f(x),* отрезком [a,b] и прямыми x=a, x=b.

Как можно определить площадь этой фигуры? (по формуле)

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Как найти площадь фигуры состоящей из двух частей?

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Задания практической работы

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = -2$

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x - 3$, $y = x^2 - 3$.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $g(x) = 3 - x$,

$f(x) = 0,5x^2 + 2x + 3$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$

Практическое занятие №52

Тема: Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей.

Цель: Применить умения по владению представлений об основных понятиях интеграла к вычислению физических величин и площадей.

Методические комбинации

Дадим математическое описание той модели, которая была построена для функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$.

1) разбивают отрезок $[a;b]$ на n равных частей.
2) составляем сумму $S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$.
3) вычисляем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Этот предел называют определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначают так :

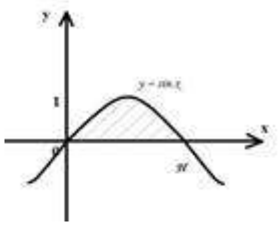
$$\int_a^b f(x)dx$$

числа a и b называют пределами интегрирования (соответственно нижним и верхним).

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью абсцисс.

Решение:

Можно взять полуволну синусоиды от точки $x=0$ до точки $x=\pi$ при следующих условиях: $a=0$, $x=\pi$, $f(x)=\sin x$.



Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5-x$, $x=1$, $x=2$.

Решение: Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке.

Воспользовавшись формулой Ньютона - Лейбница, получим

$$S=\int_1^2((5-x)-x)dx=\int_1^2(5-2x)dx=(5x-x^2)\Big|_1^2=(5\cdot 2-2^2)-(5\cdot 1-1^2)=2$$

Ответ: S = 2.

Пример 3. Тяжелая цепь длиною $L = 200$м поднимается, навиваясь на ворот. Определить работу силы веса при поднятии цепи, пренебрегая размерами ворота, если погонный метр цепи весит 50 кг.

Решение. Пусть к некоторому моменту времени на ворот навернулся отрезок цепи длиной L-x. Весит эта часть $(L\text{-}x)\cdot 50$кг. Элементарная работа силы веса на перемещение dx будет равна $A=-(L\text{-}x)\cdot 50dx.$

(*«−»* так как сила веса направлена на противоположно перемещению) Полную работу найдём как интеграл от элементарной работы

$$A=\int_0^L-(L-x)50dx=50\frac{(L-x)^2}{2}\Big|_0^L=-25L^2=-25\cdot 200^2=-1000000\,кг\cdot м.$$

Варианты заданий практической работы

1 Вариант

1) Найдите площадь фигуры (предварительно сделайте рисунок) ограниченной:
а) графиком функции
$y=4x\text{-}x^2$ и ось абсцисс

б) графиком функции $y=cos\ x$,

осью абсцисс и прямыми

$$x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{3}$$

2) Скорость движения т.U. Найти путь, пройденной точкой за 4 секунды.
($t_1=3c$, $t_2=4c$)
$S(t)=9t^2\text{-}8t$ м/с

3) Вычислить работу, проведённую при сжатии пружины на 0,06м, если для сжатия её на 0,01м затрачивается работа 10дж.

2 Вариант

1) Найдите площадь фигуры (предварительно сделайте рисунок) ограниченной:

а) графиком функции

$y=6x-x^2$ и осью абсцисс

б) графиком функции $y=\sin x$, осью абсцисс и прямыми

$x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{\pi}{3}$

2) Скорость движения т.*U*. Найдите путь, пройденной точкой за *t* секунды.

$S(t)=(6t^2+4)$м/с, $t=5$*сек.*

Найдите путь от начала движения ($t_1=0$с, $t_2=5$с)

3) Вычислить работу, проведённую при сжатии пружины на 0,05м, если для её сжатия на 0,01м затрачивается работа 12дж.

Практическое занятие № 53

Тема: Классическое определение вероятностей, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей

Цель: Знать формулы комбинаторики, теории вероятностей и уметь применять их при решении задач.

Методические рекомендации

Название	Формула	Примеры
1	2	3
1. Вероятность события *P(A)*	$P(A)=\frac{m}{n}$	В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным (событие А)? Решение. $m=9$, $n=3+9=12$

1	2	3
		$P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$
2. Вероятность достоверного события *(U)*; вероятность невозможного события *(V)*	$P(V)=0$; $P(U)=1$	
КОМБИНАТОРИКА		
3. Размещения	$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$	$A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$
4. Перестановки	$P_n=A_n^k=n!$ $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$	$P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$
5. Сочетания	$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$	$C_5^3=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$
6. Теорема сложения и умножения вероятностей	$P(A+B)=P(A)+P(B)$ $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ $P(A)+P(\overline{A})=1$, где $P(\overline{A})$ - вероятность противоположного события	• Вероятность попадания снаряда в первый склад равна 0,225, во второй – 0,325. В результате детонации любое попадание взрывает оба склада. Какова вероятность того, что оба склада будут уничтожены? <u>Решение.</u> $P(A+B)=P(A)+P(B)=$ $=0{,}225+0{,}325=0{,}55$ • Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна $P(A)=0{,}9$, для второго стрелка равна $P(B)=0{,}7$. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}9\cdot0{,}7=$ $=0{,}63$
7. Формула полной вероятности	$P(A)=P(A\|X_1)\cdot P(X_1)+$ $+P(A\|X_2)\cdot P(X_2)+\ldots+$ $+P(A\|X_n)\cdot P(X_n)$	
8. Формула Бернулли	$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}$, $q=1-p$	В урне 20 шаров: 15 белых и 5 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет 2 белых. <u>Решение.</u>

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$P=\frac{15}{20}=\frac{3}{4};\ q=1-P=\frac{1}{4}$
$P_{2,5}=C_5^2P^2q^{5-2}=$
$=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}$</td></tr>
<tr><td>9. Математическое ожидание $M(X)$</td><td>$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$,
x_n - дискретная с.в.
p_n - соответствующие вероятности

Свойства
1. $M(C)=C$
2. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$
3. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$
4. $M(C\cdot X)=C\cdot M(X)$</td><td><table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,25</td><td>0,15</td><td>0,3</td></tr></table>$M(X)=?$
Решение.
$M(X)=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}25+$
$=2\cdot 0{,}15+3\cdot 0{,}3=1{,}25$</td></tr>
<tr><td>10. Дисперсия дискретной с.в. $D(X)$</td><td>$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$</td><td><table><tr><td>$X$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>P</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td></tr></table>$D(X)=?$
$M(X)=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+$
$+2\cdot 0{,}4=0{,}9$
$M^2(X)=(0{,}9)^2=0{,}81$
$M\left(X^2\right)=(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}1+$
$+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}4=2{,}1$
$D(X)=2{,}1-0{,}81=1{,}29$</td></tr>
</table>

Практическое занятие №54

Тема: Вычисление вероятностей. Прикладные задачи.

Цель: оценить знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала

I вариант.

1. В группе иностранных туристов- 51 человек, среди них два француза. Для посещения маленького музея группу случайным образом делят на три подгруппы, одинаковые по численности. Найдите вероятность того, что французы окажутся в одной группе.
2. В среднем на 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу – 7 неисправных. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.
3. В некоторой местности утро в мае бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали: Если майское утро ясное, то вероятность дождя в течении дня равна 0,6.

Вероятность того, что утро в мае будет облачным – 0,4. Найдите вероятность того, что в случайно взятый майский день дождя не будет.

II вариант.

1. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два раза промахнулся.

2. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо - равна 0,05. Покупатель в магазине выбирает одну новую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет плохо.

3. В некоторой местности утро в июле может быть либо ясным, либо пасмурным. Наблюдения показали: Если июльское утро ясное, то вероятность дождя равна 0,1. Если июльское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,5. Вероятность того, что утро в июле будет пасмурным равна 0,2. Найдите вероятность того, что в случайно взятый июльский день дождя не будет

Практическое занятие №55

Тема: Прикладные задачи. Представление числовых данных.

Цель: Отработка навыков решения практических задач с применением вероятностных методов.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотреть теоретический материал и примеры по указанной теме.
   Решить задания, указанные в практической части.

Теоретическая часть

Меры центральной тенденции (measures of central tendency) — способы осмысления центральной или средней позиции множества наблюдений, оценок, группы чисел и т.д.

Мода – это наиболее часто встречающееся значение признака.

Необходимо подчеркнуть, что мода представляет собой наиболее частое значение признака, а не частоту этого значения.

Пример 1. Рассмотрим случай точечного распределения. В совокупности оценок успеваемости 2,3,4,4,4,5,5 модой является оценка 4 Мо=4, потому, что эта оценка встречается чаще других. Принято считать, что в случае, когда все значения оценок встречаются одинаково часто, совокупность данных моды не имеет. Например, в совокупности 3,3,3,4,4,4,5,5,5 моды нет.

Если две несмежные оценки в совокупности имеют равные частоты, и они больше частот других оценок, то существуют две моды. В примере совокупности 2, 3, 3, 4, 5, 5 модами являются оценки 3 и 5 – $Mo_1=3$, $Mo_2=5$. В этом случае говорят, что совокупность оценок является *бимодальной.*

Медианой Ме называется значение признака, относительно которого генеральная совокупность делится на две равные по объему части, причем в одной из них содержатся члены, у которых значение признака не превосходит Ме X, а в другой - не меньше Ме X.

Если ряд включает в себя четное количество признаков, то медианой (Ме) будет среднее, взятое как полусумма двух центральных значений ряда.

Пример 2. Найдем медиану выборки: 5, 4, 5, 6, 7, 3, 6, 2, 8, 6, 9, 7.

Упорядочим выборку: 2, 3, 4, 5, 5, 6, / 6, 6, 7, 7, 8, 9. Поскольку здесь имеется четное число элементов, то существует две «середины» - 6 и 6. В этом случае медиана определяется как среднее арифметическое этих значений Ме=(6+6)/2=6.

Найдем медиану выборки с нечетным количеством значений: 9, 3, 5, 8, 4, 11, 13.

Сначала упорядочим выборку по величинам входящих в нее значений. Получим: 3, 4, 5, 8, 9, 11, 13. Поскольку в выборке семь элементов, четвертый по порядку элемент будет серединой ряда. Таким образом, медианой будет четвертый элемент – 8.

Среднее арифметическое значение, или просто *среднее* ($\bar{x}$), равно сумме переменных, деленной на их число.

Для несгруппированных переменных среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i.$$

Размахом выборки называется величина $R = X_{(n)} - X_{(1)}$

Иными словами, размах - это расстояние между максимальным и минимальным членом вариационного ряда.

Дисперсия. Один из способов измерения рассеяния данных заключается в том, чтобы определить степень отклонения каждого наблюдения от средней арифметической. Очевидно, что чем больше отклонение, тем больше изменчивость наблюдений.

Однако мы не можем использовать среднее этих отклонений как меру рассеяния, потому что положительные отклонения компенсируют отрицательные отклонения (их сумма равна нулю). Чтобы решить эту проблему, мы возводим в квадрат каждое отклонение и находим среднее возведенных в квадрат отклонений; эта величина называется **дисперсией**.

Возьмем n наблюдений x_1, x_2, x_3, ..., x_n, среднее которых равняется $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$. Вычисляем дисперсию:

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Среднеквадратическое отклонение — это положительный квадратный корень из дисперсии.

Мы можем представить себе стандартное отклонение как своего рода среднее отклонение наблюдений от среднего. Оно вычисляется в тех же единицах (размерностях), что и исходные данные.

Пусть X – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \dots$ с вероятностями $p_1 = P\{X = x_1\}, p_2 = P\{X = x_2\}, \dots$

тогда **математическое ожидание** дискретной случайной величины M(X) определяется как сумма: $\sum x_i p_i$.

Пример 3. Найти размах, моду, медиану, среднее выборки значений случайной величины X, построить полигон частот.

X	-2	-1	0	1	3
M	1	3	2	4	1

Распишем ряд выборки: -2, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 3.
Mo=1 (наибольшая частота – у 1), Me=0 (срединное значение в ряду признака).
R=3-(-2)=5.

$$\bar{X} = \frac{-2 - 1 - 1 - 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3}{11} = \frac{2}{11}$$

Пример 4. Найти дисперсию выборки 10см, 12см, 7см, 11см и среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки.

$$\bar{X} = \frac{10 + 12 + 7 + 11}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$D = \frac{(10-10)^2 + (12-10)^2 + (7-10)^2 + (11-10)^2}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5 см^2$$

$$\sigma(\text{x}) = \sqrt{D(\text{x})} = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87 \text{ см}$$

Практическая часть

Задание 1. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:

1) -1, 12, -6, -7, 13, -2, 10, -2, -9
2) 4, -10, 13, 8, -6, -3, -1, 13, -6

Задание 2. Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X. Построить полигон частот.

X	-3	-1	0	5
M	2	3	5	2

Задание 3. Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

X	-3	-1	0	5
M	2/7	3/7	1/7	1/7

Задание 4. Найти дисперсию выборки:
1) 16г, 14г, 13г, 17г
2) 5м, 13м, 8м, 12м, 12м

Задание 5. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки

12м, 10м, 7м 17м, 9м

Задание 6. Сравнить по стабильности двух футболистов, если число голов, забитых каждым из игроков, приведено в таблице:

№ сезона	1	2	3	4	5	6
1 игрок	17	21	20	16	15	19
2 игрок	-	17	20	18	21	14

Контрольные вопросы:
1. Понятие медианы?
2. Понятие моды?
3. Понятие среднее арифметическое?
4. Понятие размах?
5. Понятие статистика?

Практическое занятие № 56

Тема: Корни уравнений. Равносильность уравнений.

Цель: Научиться вычислять корни уравнений и определять равносильность уравнений.

Варианты заданий:

<u>1 вариант</u>

1.Уравнения x^2-9=0 и (x+3)*(3x-18)=0 – равносильны?

2.Решить 2-мя способами уравнение:

$\sqrt{3x+16}$=x+2 и сделать вывод

3.Равносильны ли уравнения:

$5^{x+1}+5^x$=750 и x^2-9=0?

4.Решить уравнение:

sin4x=0 и вычислить полученный результат при k=0; ±2

5.Найти корень уравнения:
$|4x-5|=15$

2 вариант
1.Уравнения $x^2-64=0$ и $(x+8)*(4x-32)=0$ – равносильны?
2.Решить 2-мя способами уравнение:
$\sqrt{x+23} = x+3$ и сделать вывод
3.Равносильны ли уравнения:
$6^{x+2}-6^x=35$ и $x^2=0$?
4.Решить уравнение:
cos6x=1 и вычислить полученный результат при k=0; ±12
5.Найти корень уравнения:
$|4x+7|=15$

Практическое занятие № 57

Тема: Преобразование уравнений. Основные приемы решения уравнений и неравенств

Цель: отработать навыки вычисления логарифмов, преобразования простейших логарифмических выражений, решения простейших логарифмических уравнений.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

1. Теоретический материал.

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b (числа **b, a – положительные, a≠ 1).**

Если $a^c = b$, то $\log_a b = c$

$a^{\log_a b} = b$ ⟶ основное логарифмическое тождество

Свойства логарифмов справедливы для логарифмов по любому основанию(а >0 ; а≠ 1**):**

1.**$\log_a 1=0$**

2.**$\log_a a=1$**

3. **$\log_a a^k=k$**

4. **$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$**

5. **$\log_a(x/y)=\log_a x - \log_a y$**

6**.** **$\log_a b^k=k\cdot\log_a b$**

Основание логарифма и число под знаком логарифма можно поменять местами по формуле:

$\log_a b=1/\log_b a$

Общая формула перехода к логарифму по другому основанию.

$\log_a b=\log_c b/\log_c a$

Логарифм по основанию a^n.

$\log_{a^n} b=(1/n)\cdot\log_a b$

Логарифм числа **b** по основанию **a^n** равен произведению дроби **1/n** на логарифм числа **b** по основанию **a**.

Примеры решения

Задания для самостоятельной работы:

Пример 1. Вычислите $\log_2 8$

Решение: $\log_2 8 = 3$.(т.к. $2^3 = 8$)

Пример2. Вычислите $\log_5 25$.

Решение: $\log_5 25 = 2$

Пример 3. Вычислите $\log_6 \frac{1}{36}$

Решение.$\log_6 \frac{1}{36} = -2$ (т.к. $6^{-2} = \frac{1}{36}$)

1.Вычислите значение выражения	а) $\log_5 \frac{1}{25}$ б) $\log_3 81$ в) $\log_8 12 + \log_8 \frac{1}{3}$ г) $\log_3 66 - \log_3 22$ д) $\log_{98} 1$ е) $\frac{\log_4 25}{\log_4 5}$ ж) $(2\log_{12}2 + \log_{12}3)(2\log_{12}6 - \log_{12}3)$ з) $5^{\log_5 8+1}$ и) $\log_2(-2)$
2. Найдите х, если	а) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{8}) = x$ б) $\log_x 0{,}125 = -3$ в) $\log_{16} x = -\frac{3}{4}$ г) $\log_6 x = -2$ д) $\log_3 x = 2\log_3 12 - \log_3 6 + \log_3 5$
3.Найдите $\log_a x$, если $\log_a в = 4$, $\log_a c = 2$	$X = \frac{a^2 в}{c}$; x= $a^2\sqrt{в}$

Практическое занятие №58

Тема: Решение систем уравнений.

Цель: Научиться решать системы уравнений.

Вариант 1.

Задание 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x-4y=18 \\ 2x+5y=19 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x-2y=7 \\ 3x+4y=25 \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{4}-\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{7-2y}{3}=1-x \\ 3x-2y=8 \end{cases}$$

Задание 3. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 4x-6y=3 \end{cases}$

Задание 4.

а) При каком значении ***а*** система $\begin{cases} 14x+32y=25 \\ 28x+ay=7 \end{cases}$ не имеет решений?

б) При каком значении ***а*** система $\begin{cases} 7x-12y=81 \\ 49x-ay=567 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Задание 5. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

а) $\begin{cases} 7x_1-3x_2+5x_3=32 \\ 5x_1+2x_2+x_3=11 \\ 2x_1-x_2+3x_3=14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$

Задание 6. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=9 \\ -2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ x_1+6x_3=13 \end{cases}$

Задание 7. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} ax+2y=a \\ 8x+ay=2a \end{cases}$$

Практической занятие № 49

Контрольная работа №3

Контрольная работа № 1
по теме «Начала математического анализа»

I вариант

1. Вычислите производные функций и найдите значение производной в точке $x = 1$:

1) $y = x^5 + 3x^3 - 12x^2 + \dfrac{4x}{9} - 18;$

2) $y = 3\sqrt[3]{2x^4} - \dfrac{7}{2x^{\frac{5}{2}}};$

3) $y = \sqrt{3x-2}\,\sin 2x;$

4) $y =\ y = \dfrac{3x^2-5}{x+1};$

5) $y = e^{-x-1}\ln 2x.$

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 2x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{3\pi}{4}.$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4$, параллельной прямой $y = x - 4$.

II вариант

1. Вычислите производные функций и найдите значение производной при $x = -1$:

1) $y = 3x^4 - x^3 - 3\dfrac{x^2}{7} + 5x + 9$; 2) $y = 6\sqrt[3]{4x^2} - \dfrac{7}{x^3}$;

3) $y = \sqrt{4x+5}\cos 3x$; 4) $y = \dfrac{4x+4}{x^2-2}$;

5) $y = e^{2-x}\ln(-2x)$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin 0{,}5x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2$, параллельной прямой $y = 2x$.

Практическое занятие№59

Тема Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств

Цель: Закрепить навыки решение уравнений и неравенств используя свойства графиков функций.

Приложение 4

Вариант 3

1. Какое неравенство не существует при x = - 6:

1) $\lg(x+1) > -x$;

2) $2x-1 \le \dfrac{1}{x}$;

3) $2^x \ge x^3$?

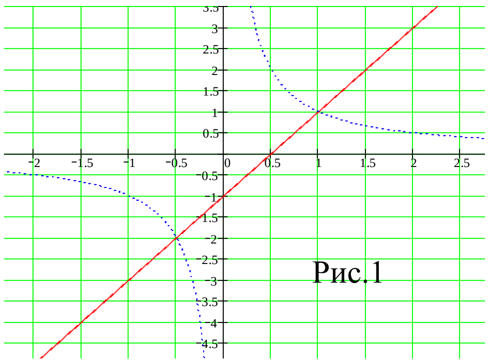


Рис.1

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $2^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;1]$; 3) (-0,5;0); 4) (1;2).

3. Выберите решение неравенства $2x-1 \le \dfrac{1}{x}$:

1) $(-\infty;-05]\cup[1;+\infty)$;

2) $[1;+\infty)$;

3) $(-\infty;-05]\cup(0;1]$;

4) $(-\infty;-05]$.

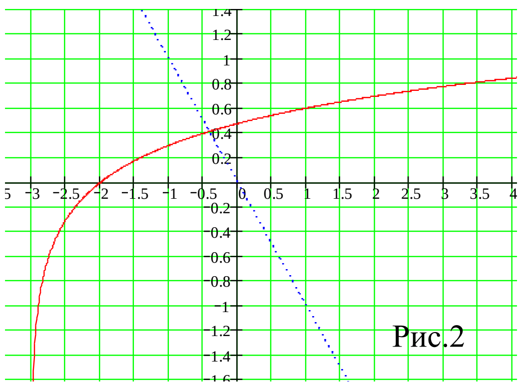


Рис.2

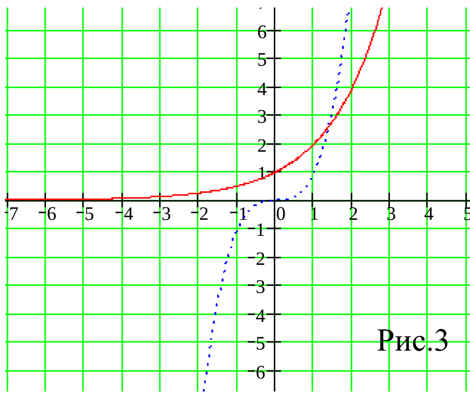


Рис.3

4. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg(x+1) = -x$? (укажите в бланке номер рисунка).

5. Укажите приближенное значение корня уравнения $\lg(x+1) = -x$:

1) -2; 2) 0,4; 3) -0,3.

Вариант 4

1. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;0]$; 3) (0,5;1,5); 4) (0;0,5).

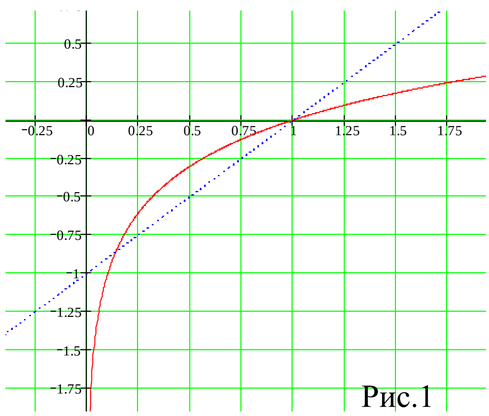


Рис.1

2. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg x = x-1$? (укажите в бланке номер рисунка).

3. Какое неравенство не существует при x = - 2:

1) $x^2 < \dfrac{2}{x}$;

2) $\lg x \le x - 1$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge x^3$?

4. Выберите решение неравенства $x^2 \ge \frac{2}{x}$:

1) $(-\infty;-05]$;

2) $[1,3;+\infty)$;

3) $(-\infty;0]\cup[1,3;+\infty)$;

4) $(-\infty;0)\cup[1,3;+\infty)$.

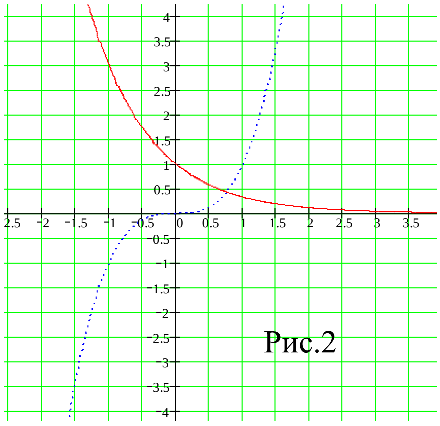


Рис.2

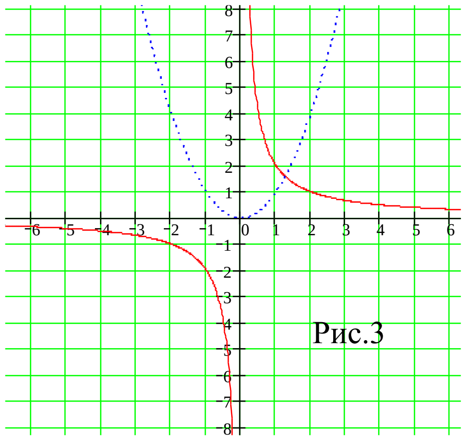


Рис.3

5. Укажите значение наибольшего корня уравнения $\lg x = x - 1$:

1) 0,15; 2) 0; 3)1.

Вариант 1

1. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg(x+1)=-x$? (укажите в бланке номер рисунка).

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $2^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;1]$; 3) (-0,5;0); 4) (1;2).

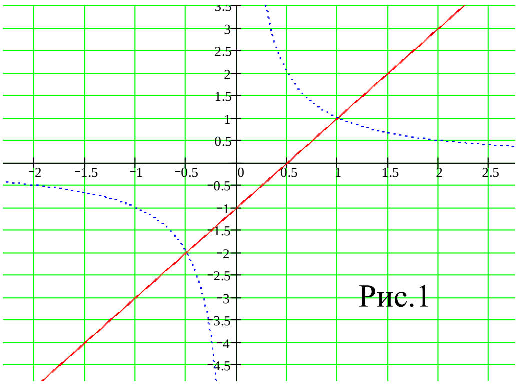


Рис.1

3. Выберите решение неравенства $2x-1\le\frac{1}{x}$:

1) $(-\infty;-05]\cup[1;+\infty)$;
2) $[1;+\infty)$;
3) $(-\infty;-05]\cup(0;1]$;
4) $(-\infty;-05]$.

4. Какое неравенство не существует при x = - 6.

1) $\lg(x+1)>-x$;
2) $2x-1\le\frac{1}{x}$;
3) $2^x\ge x^3$?

5. Укажите приближенное значение корня уравнения $\lg(x+1)=-x$:

1) -2; 2) 0,4; 3) -0,3.

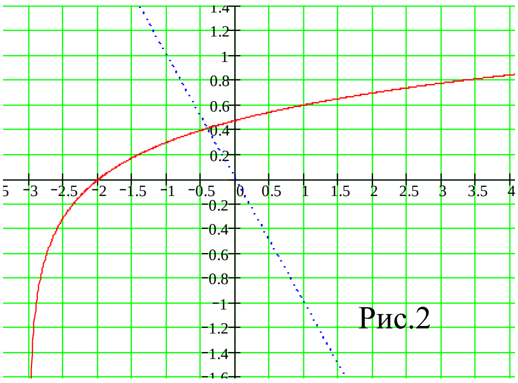


Рис.2

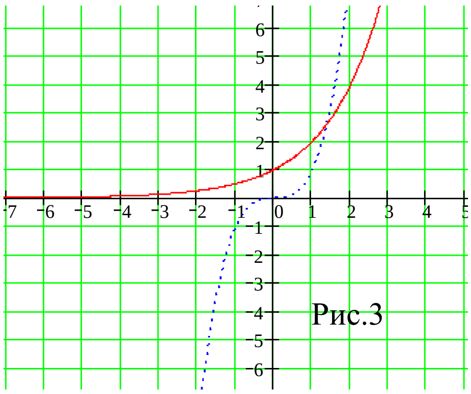


Рис.3

Вариант 2

1. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg x = x-1$? (укажите в бланке номер рисунка).

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;0]$; 3) (0,5;1,5); 4) (0;0,5).

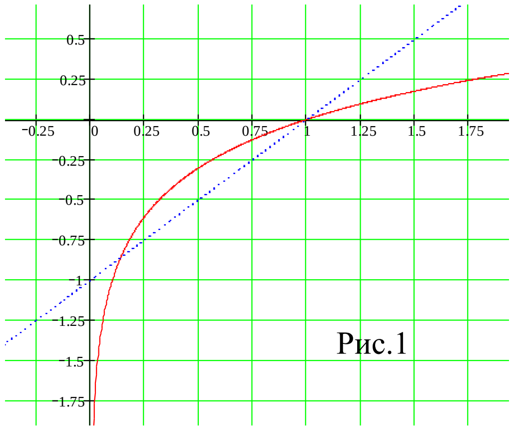


Рис.1

3. Выберите решение неравенства $x^2\ge\frac{2}{x}$:

1) $(-\infty;-05]$;
2) $[1{,}3;+\infty)$;
3) $(-\infty;0]\cup[1{,}3;+\infty)$;
4) $(-\infty;0)\cup[1{,}3;+\infty)$.

4. Какое неравенство не существует при x = - 2.

1) $\lg x\le x-1$;
2) $x^2<\frac{2}{x}$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\ge x^3$?

5. Укажите значение наибольшего корня уравнения $\lg x = x-1$:

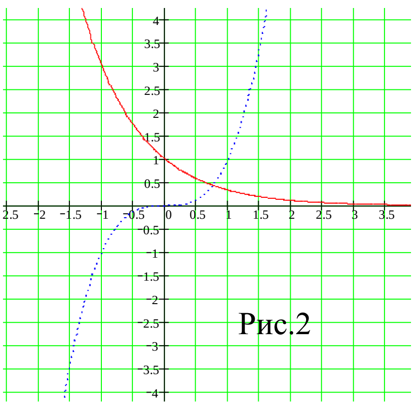


Рис.2

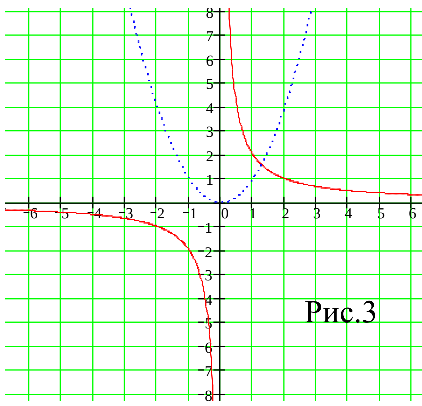


Рис.3

1) 0,15; 2) 0; 3)1.