Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное автономное профессиональное образовательное
учреждение Краснодарского края
"Каневской аграрно-технологический колледж" (ГАПОУ КККАТК)

Рассмотрены
на заседании УМО «Проектно-исследовательская деятельность»
_________ Н.А.Олифиренко
«29» августа 2022 г.

Согласован:
Старший методист
_________ Н.А.Королёва
«29» августа 2022 г.

Методические рекомендации для обучающихся
по выполнению практических занятий
по учебной дисциплине «ОДП.10 МАТЕМАТИКА»
по профессии
43.01.02 Парикмахер
38.01.02 Продавец, контролер-кассир
Социально-экономический профиль
(базовая подготовка, очная форма обучения)

2022г.

Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края
"Каневской аграрно-технологический колледж" (ГАПОУ КККАТК)

Рассмотрены
на заседании УМО «Проектно-исследовательская деятельность»

____________Н.А.Олифиренко

«____» ______________ 2022 г.

Согласован:
Старший методист

_____________Н.А.Королёва

«____»___________2022 г.

Методические рекомендации для обучающихся
по выполнению практических занятий
по учебной дисциплине «ОДП.10 МАТЕМАТИКА»
по профессии
43.01.02 Парикмахер
38.01.02 Продавец, контролер-кассир
Социально-экономический профиль
(базовая подготовка, очная форма обучения)

2022г.

Методические рекомендации для обучающихся по выполнению практических занятий разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта, рабочей программы учебной по учебной дисциплине «ОДП.10 МАТЕМАТИКА»
по профессии
43.01.02 Парикмахер
38.01.02 Продавец, контролер-кассир
Социально-экономический профиль (базовая подготовка, очная форма обучения)

Разработчик: Авдеева К.С.. – преподаватель ГАПОУ КККАТК

Рекомендовано УМО «Проектно-исследовательская деятельность» ГАПОУ КККАТК

Протокол № ___ от «___ » _________2022г.

Содержание:

Введение

Методические рекомендации для обучающихся по выполнению практических занятий по дисциплине составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, рабочим учебным планом, рабочей программой и календарно-тематическим планом учебной дисциплины по учебной дисциплине «ОДП.10 МАТЕМАТИКА»

по профессии

43.01.02 Парикмахер

38.01.02 Продавец, контролер-кассир

Социально-экономический профиль (базовая подготовка, очная форма обучения).

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплины;

Задачи:

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические и лабораторные занятия носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер.

Общие методические указания по выполнению практических и лабораторных занятий

Перед выполнением практических и лабораторных занятий необходимо повторить изученный материал, ответить на контрольные вопросы, выполнить задания тестового типа (при наличии).

Алгоритм выполнения практических и лабораторных занятий (ЛПЗ)

1. Прочитать инструкцию по выполнению практического занятия
2. Записать тему, цель, средства обучения практического занятия (лабораторного занятия)
3. Приступить к выполнению практического занятия следуя инструкции.
4. Оформить записи в тетради по предложенному алгоритму.
5. Сформулировать и записать вывод.
6. Записать домашнее задание.

Тетрадь для практических занятий проверяется преподавателем после каждой проведенной работы, оценки выставляются каждому обучающемуся, с занесением оценок в классный журнал.

Оценки за выполнение ЛПЗ выставляются по пятибалльной системе и учитываются как показатели текущей успеваемости обучающихся.

Требования к результатам выполнения практических и лабораторных занятий по дисциплине «ОДП.10 МАТЕМАТИКА:»

В процессе подготовки и выполнения практических занятий, обучающиеся должны овладеть следующими умениями и знаниями

Код [1] ПК, ОК, ЛР	Умения	Знания
ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 5. ОК 6. ОК 7. ОК 8. ЛР 1. ЛР 05 ЛР 06 ЛР 07 ЛР 08 ЛР 09 ЛР 10 ЛР 11	**• метапредметных:** − умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях; − умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты; − владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания; − готовность и способность к самостоятельной	**• личностных:** − сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики; − понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; − развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; − овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих

	информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников; − владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства; − владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения; − целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира; • **предметных:** − сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке; сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических	углубленной математической подготовки; − готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности; − готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности; − готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности; − отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

	моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; − владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; − владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; − сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей; − владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных	

	свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; − сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; − владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.	

Код ПК, ОК, ЛР	Умения	Знания
ОК 1. ОК 2. ОК 3. ОК 4. ОК 5. ОК 6. ОК 7. ОК 8. ОК 9. ОК 10. ОК 11. ЛР 1. ЛР 05 ЛР 06 ЛР 07 ЛР 08 ЛР 09 ЛР 10 ЛР 11	- обрабатывать результаты измерений, обнаруживать зависимость между физическими величинами, объяснять полученные результаты и делать выводы; - решать физические задачи; - применять полученные знания для объяснения условий протекания физических явлений в природе, профессиональной сфере и для принятия практических решений в повседневной жизни; - сформированность собственной позиции по отношению к физической информации, получаемой из	- представления о роли и месте физики в современной научной картине мира; понимание физической сущности наблюдаемых во Вселенной явлений, роли физики в формировании кругозора и функциональной грамотности человека для решения практических задач; - основополагающие физические понятия, закономерности, законы и теории; физическая терминология и символика; основные методы научного познания, используемые в физике: наблюдение, описание, измерение,

	разных источников.	эксперимент;

Перечень практических и лабораторных занятий

Таблица 2

№ занятия	Тема	Количество часов
1.	Практическое занятие №1 Арифметические действия над числами, сравнений числовых выражений.	1
2.	Практическое занятие № 2 Нахождение приближенных значении величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной).	1
3.	Практическое занятие № 3 Вычисление и сравнение корней.	1
4.	Практическое занятие № 4 Нахождение значений степеней с рациональными показателями.	1
5.	Практическое занятие № 5 Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.	1
6.	Практическое занятие № 6 Логарифмирование и потенцирование.	1
7.	Практическое занятие № 7 Преобразование выражений, содержащих степени.	1
8.	Практическое занятие № 8 Контрольная работа по теме: «Корни, степени, логарифмы»	1
9.	Практическое занятие № 9 Признаки взаимного расположения прямых.	1
10.	Практическое занятие № 10 Перпендикуляр и наклонная к плоскости.	1
11.	Практическое занятие № 11 Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.	1
12.	Практическое занятие № 12 Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач.	1
13.	Практическое занятие № 13 Размещения, сочетания и перестановки.	1
14.	Практическое занятие № 14 Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Прикладные задачи.	1
15.	Практическое занятие № 15 Решение комбинаторных задач.	1
16.	Практическое занятие № 16 Векторы. Действия с векторами.	1
17.	Практическое занятие № 17 Действия с векторами, заданными координатами.	1

18.	Практическое занятие № 18 Скалярное произведение векторов.	1
19.	Практическое занятие № 19 Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.	1
20.	Практическое занятие № 20 Основные тригонометрические тождества	1
21.	Практическое занятие № 21 Формулы сложения, удвоения.	1
22.	Практическое занятие № 22 Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.	1
23.	Практическое занятие № 23 Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.	1
24.	Практическое занятие № 24 Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс	1
25.	Практическое занятие № 25 Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства	1
26.	Практическое занятие № 26 Контрольная работа по теме “Основы тригонометрии”	1
27.	Практическое занятие № 27 Построение и чтение графиков функций.	1
28.	Практическое занятие № 28 Графическая интерпретация.	1
29.	Практическое занятие № 29 Обратные функции и их графики.	1
30.	Практическое занятие № 30 Область определения логарифмических функций.	1
31.	Практическое занятие № 31 Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников.	1
32.	Практическое занятие № №32 Симметрия тел вращения и многогранников	1
33.	Практическое занятие № 33 Вычисление площадей и объемов	1
34.	Практическое занятие № 34 Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности.	1

35.	Практическое занятие № 35 Производная: механический и геометрический смысл производной.	1
36.	Практическое занятие № 36 Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций	1
37.	Практическое занятие № 37 Уравнение касательной в общем виде	1
38.	Практическое занятие № 38 Исследование функции с помощью производной	1
39.	Практическое занятие № 39 Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции	1
40.	Практическое занятие № 40 Контрольная работа по теме: “Начала математического анализа”	1
41.	Практическое занятие № 41 Интеграл и первообразная	1
42.	Практическое занятие № 42 Теорема Ньютона—Лейбница	1
43.	Практическое занятие № 43 Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей	1
44.	Практическое занятие № 44 Вычисление вероятностей	1
45.	Практическое занятие № № 45 Прикладные задачи. Представление числовых данных.	1
46.	Практическое занятие № 46 Корни уравнений. Равносильность уравнений	1
47.	Практическое занятие № 47 Основные приемы решения уравнений	1
48.	Практическое занятие № 48 Решение систем уравнений	1
49.	Практическое занятие № 49 Преобразование уравнений	1
50.	Практическое занятие № 50 Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств	1
	Итого:	**50**

Практическое занятие №1 Арифметические действия над числами, сравнений числовых выражений.

Цели занятия:

Формирование, подтверждение и проверка теоретических знаний по делению, используя правила приближенного округления; выполнение действий с точностью до 0,000001, используя округление.

Тип урока: Практическое занятие.

Литература и оснащение:

М.И. Башмаков / Математика: М.: Издательский центр «Академия», 2013г.

Таблица умножения.

Инструкция по выполнению практической работы.

Методические рекомендации

1. Внимательно прочитайте задания.
2. Повторить таблицу умножения.
3. Вспомнить: какие бывают множества чисел.
4. Повторить правила перевода дроби из периодической в обыкновенную.
5. Повторить правила приближенного вычисления.

Ход занятия

Организационный момент

Оформление доски; проверка наличия у обучающихся тетрадей для практических занятий, канцелярских принадлежностей; отчет старосты группы по посещаемости.

Актуализация опорных знаний

1. Перечислите множества чисел *(натуральные, рациональные, иррациональные, действительные).*
2. Какое множество включает все числа? *(действительные)*
3. При округлении, когда мы прибавляем «1» к предыдущему числу, когда отбрасываем числа *(когда меньше пяти).*
4. При преобразовании бесконечной периодической дроби на что надо обратить внимание? *(количество цифр, стоящих перед периодом после запятой и количество цифр, стоящих в периоде)*

Теоретическая часть

Изучение математики начинается с натуральных чисел, т.е. с чисел 1, 2, 3, 4, 5,… . При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами (т.е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т.е. чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, … . При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Бесконечную десятичную дробь 0,3333… называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 – ее *периодом*. Периодическую дробь 0,333… коротко записывают так: 0,(3); читается: «Ноль целых и три в периоде».

Периодическая дробь – это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби.

Если бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001…, в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 – два нуля и, вообще, после n – й цифры стоит n нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом.*

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Практическая часть

Задание 1. Представить в виде бесконечной десятичной дроби числа. Выполнить деление столбиком, не используя калькулятор.

Ответ (пример):

$$а)\frac{1}{7},\quad б)\frac{5}{\pi},\quad в)\frac{7}{13},\quad г)\frac{15}{19},\quad д)\frac{13}{29},\quad е)\frac{39}{41}.$$

а)
$$\begin{array}{r|l}
10 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{7} & 0,1428571\ldots \\
30 & \\
\underline{28} & \\
20 & \\
\underline{14} & \\
60 & \\
\underline{56} & \\
40 & \\
\underline{35} & \\
50 & \\
\underline{49} & \\
10 & \\
7 \text{ и т.д.} &
\end{array}$$

Действие:

$$а)\frac{1}{7},\quad б)\frac{5}{\pi},\quad в)\frac{7}{13},\quad г)\frac{15}{19},\quad д)\frac{13}{29},\quad е)\frac{39}{41}.$$

Ответ: а) 0,142857…
б) 0,454545…
в) 0,538462…
г) 0,789474…
е) 0,951220…

Задание 2. Преобразовать бесконечную периодическую дробь в обыкновенную:

$$а)0{,}3(12); \qquad г)0{,}32(16)$$
$$б)2{,}13(7); \qquad д)4{,}(521)$$
$$в)0{,}5(72); \qquad е)0{,}(035)$$

Ответ:

Задание		Ответ
а)	0,3(12)	Пусть x = 0,312… / 10 10x = 3,12… / 100 1000x = 312,12 1000x – 10x = 312,12 – 3,12 990x = 309 x = 309 : 990 = $\frac{103}{330}$
б)	2,13(7)	Пусть x = 2,137… / 100 100x = 213,7… / 10 1000x = 2137,7 1000x – 100x = 2137,7 – 213,7 900x = 1924 $x = \frac{1924}{900} = 2\frac{124}{900} = 2\frac{31}{225}$
в)	0,5(72)	Пусть x = 0,572… / 10 10x = 5,72… / 100 1000x = 572,72 1000x – 10x = 572,72 – 5,72 990x = 567 x = 567 : 990 = $\frac{63}{110}$
г)	0,32(16)	Пусть x = 0,3216… / 100 100x = 32,16… / 100 10000x = 3216,16 10000x – 100x = 3216,16 – 32,16 9900x = 3184 $x = \frac{3184}{9900} = \frac{796}{2475}$
д)	4,(521)	Пусть x = 4,521… / 1000 1000x = 4521,521 999x = 4517 1000x – x = 4521,521 – 4,521 999x = 4517 $x = \frac{4517}{999} = 4\frac{521}{999}$
е)	0,(035)	Пусть x = 0,035… / 1000 1000x = 35,035 1000x – x = 35,035 – 0,035 999x = 35 $x = \frac{35}{999}$

Задание 3. Выполнить действия. Найти сумму и произведение чисел:

а) x = 3,5151151115..;
y = 4,343343334...

б) x = 2,36…;
y = 1,020020002.

Ответ:

Задание	Ответ

а)	x + y	7,8584584…
	x × y	15,267351…
б)	x + y	3,38002…
	x × y	2,4072472…

Контрольные вопросы и задания

Ответить на вопросы:

1. Может ли сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом? *(нет)*

2. Сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом? *(да)*

Организация обсуждения итогов выполнения практического занятия

Вывод:

В результате выполненной работы обучающиеся проверяют и подтверждают теоретические знания деления, используя правила приближенного округления.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 2

Тема: Нахождение приближенных значении величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной).

Цель: закрепить и систематизировать знания по данной теме; научить находить приближенные значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнивать числовые выражения, применять полученные умения и знания на практике; определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Порядок выполнения работы:

Краткий теоретический материал

Определение. *Абсолютной погрешностью приближения называется модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.*

$\Delta = |a - x|$, где Δ – абсолютная погрешность, x – приближенное значение некоторой величины (например, полученное путём однократного измерения этой величины), а – ее точное значение величины,

$\Delta = |a - x| \Rightarrow a - x = \pm \Delta \Rightarrow a = x \pm \Delta$

Пример 1

Найти абсолютную погрешность приближения 0,44 числа 4/9.

$$\Delta = \left|\frac{4}{9} - 0{,}44\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{11}{25}\right| = \left|\frac{100-99}{225}\right| = \frac{1}{225}$$

На практике во многих случаях точное значение бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность найти нельзя. Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Определение. *Границей абсолютной погрешности Δ приближения называется такое положительное число h больше которого абсолютная погрешность быть не может.*

$\Delta = |a - x| \le h$

Пример 2

$$\frac{1}{225} = 0{,}004444... < 0{,}0045$$

x - Δ – Нижняя граница (Н.Г.) x + Δ – Верхняя граница (В.Г.)

Приближенные числа, как и точные записываются как правило при помощи десятичных дробей. Но если в записи точного числа все его цифры верные, то в приближенном некоторые его цифры верные, а другие являются сомнительными.

Определение. *Цифра называется верной (точно значащей), если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда в котором записана эта цифра. В противном случае она называется сомнительной.*

Пример 3

$x = 3{,}7412 \pm 0{,}002$ Определить верные и сомнительные цифры.

В.Г. = 3,7412 + 0,002 = 3,7432

Н.Г. = 3,7412 - 0,002 = 3,7392

Верные – 3 и 7, сомнительные 4,1 и 2.

<u>Замечания</u>

В записи приближенного числа сохраняются только верные цифры. $x = 3{,}7$

Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то они остаются в записи числа.

$x = 0{,}301 \pm 0{,}001$

$В.Г. = 0{,}302 \quad Н.Г. = 0{,}300 \Rightarrow x = 0{,}30$

В десятичной записи числа значащими цифрами называются все его верные цифры, начиная с первой слева отличной от нуля.

0, 583; 38,57; 38,507; 29,830

<u>Правило округления чисел</u>: Если первая слева отбрасываемая цифра меньше 5, то округляют с недостатком, если это цифра 5 или больше, то округляют с избытком.

Пример 4

5,739 (с точностью до 0,01) $\approx 5{,}74$

3, 53 (с точностью до целых) ≈ 4

30253 (с точностью до 1000) ≈ 30000

Но абсолютной погрешности не достаточно для полной характеристики приближения. Если измерять расстояние между двумя городами, которое равно 100 км, с точность до 1 м, то это будет точное измерение, а если с точность до 1м измерена длина участка земли, которая равна 10м, то это грубое измерение.

<u>Определение</u>. *Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению измеряемой величины. Обычно выражается в процентах.*

$$\omega = \frac{\omega}{x}\ ;\ \omega\% = \frac{\omega}{x}\cdot 100\%\ \text{либо}\ \varepsilon(x) = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Т.о. для более полной оценки точности измерений необходимо определить, какую часть, или сколько процентов, составляет абсолютная погрешность от значения данной величины.

Пример 5

Сравнить точность двух измерений.

$d = 4 \pm 0{,}3; \quad H = 600 \pm 0{,}3$

$$\omega(d) = \frac{0{,}3}{4} = \frac{3}{10} \div 4 = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{40} = 0{,}075 = 7{,}5\%$$

$$\omega(H) = \frac{0{,}3}{600} = \frac{3}{10} \div 600 = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{600} = \frac{3}{6000} = \frac{1}{2000} = 0{,}5\cdot 0{,}001 = 0{,}0005 = 0{,}05\%$$

Второе измерение более точное.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Найти абсолютную погрешность приближения 0,55 числа 5/8
2. $x = 4{,}7452 \pm 0{,}003$ Определить верные и сомнительные цифры

3. Сравнить точность двух измерений:

   $d = 5 \pm 0{,}3$; $H = 500 \pm 0{,}3$

   Вариант 2

1. Найти абсолютную погрешность приближения 0,77 числа 7/9
2. $x = 5{,}7462 \pm 0{,}002$ Определить верные и сомнительные цифры
3. Сравнить точность двух измерений:

   $d = 4 \pm 0{,}2$; $H = 700 \pm 0{,}2$

Контрольные вопросы:

1. Понятие погрешности?
2. Понятие абсолютная и относительная погрешность?
3. Правило округления?

Домашнее задание:

Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№5

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 3
Вычисление и сравнение корней.

Цель: Закрепить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:

1. Закрепить знания по теме «Корни».
2. Применить умения по выполнению расчетов с радикалами.
3. Корректировать знания, умения по теме «Решение иррациональных уравнений».
4. Научить применять полученные умения и знания на практике.

Материально-техническое обеспечение: мультимедийный проектор, экран, методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Краткий теоретический материал

Опр. Арифметическим корнем $n \geq 2$ натуральной степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число,n-я степень которого равна a

Вообще, если n- натуральное число, m - целое число и частное m/n является целым числом то при a>0 справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n, m — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. 2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Корень чётной степени имеет смысл (т.е. определён) только для неотрицательного подкоренного выражения.

Корень нечётной степени имеет смысл для любого подкоренного выражения.

Для вычисления корней используем таблицу степеней (см.приложение)

Примеры с решениями

$$\sqrt[3]{125*0,027} = \sqrt[3]{125}*\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{5^3}*\sqrt[3]{(0,3)^3} = 5*0,3 = 1,5$$

$$\sqrt[3]{10}*\sqrt[3]{\frac{25}{16}} = \sqrt[3]{\cancel{10}^5*\frac{25}{\cancel{16}^8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\sqrt{34^2-16^2} = \sqrt{(34-16)(34+16)} = \sqrt{18*50} = \sqrt{2*9*2*25} = 2*3*5 = 30$$

$$\frac{518^2-482^2}{360} = \frac{(518-482)(518+482)}{360} = \frac{36*1000}{360} = 100$$

$$\frac{\left(a^2 b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{9}{8}}} = \frac{\left(a^2\right)^{\frac{1}{4}} * \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{9}{8}}} = a^{2*\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} * b^{\frac{1}{2}*\frac{1}{4}-\frac{9}{8}} = a^{\frac{2}{4}-\frac{1}{2}} * b^{\frac{1}{8}-\frac{9}{8}} =$$

$$= a^0 * b^{-\frac{8}{8}} = 1 * b^{-1} = \frac{1}{b}$$

2.Упростить выражение $\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где a > 0, b > 0.

Решение: используя свойства арифметического корня, получаем

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}} = \frac{a^3b^2}{a^2b} = ab$$

Ответ: ab

3.Сравните числа: $3\sqrt{7}$ или $2\sqrt{17}$

Пояснение: $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$

$2\sqrt{17} = \sqrt{4 \cdot 17} = \sqrt{68}$

68>63 следовательно первое число меньше второго.

Пример решения иррационального уравнения:

ПРИМЕР 1. Решите уравнение $\sqrt{x+16} - x + 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Уединим радикал и затем возведем обе части в квадрат

$$\left(\sqrt{x+16}\right)^2 = (x-4)^2, \quad x+16 = x^2 - 8x + 16,$$

$$x^2 - 9x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 9.$$

Проверка показывает, что $x_1 = 0$ – посторонний корень.

ОТВЕТ: 9.

Задание к практической работе

Задание 1.

$\sqrt{841}$

$\sqrt{0{,}0625}$

$\sqrt{0{,}000324}$

$\sqrt[4]{8 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 27} =$

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} =$

Задание 2. ***Вычислить***

$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
$16^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$27^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{3}}$	$25^{\frac{1}{2}}$
$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{5})^4$	$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt{6})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{3})^4$	$(\sqrt{5})^0$

Задание 3

1. Найдите значение выражения:

1) а) $\sqrt{0{,}16}$; б) $\sqrt[3]{216}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0001}$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$;

2) а) $6\sqrt[3]{0{,}125}$; б) $0{,}7\sqrt[4]{81}$; в) $4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; г) $6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$.

2. Вычислите:

1) а) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; б) $\sqrt[5]{0{,}00032}+\sqrt[3]{-0{,}008}$;

в) $1{,}5\sqrt[6]{\frac{1}{64}}-\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;

2) а) $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}}-\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; б) $\sqrt[3]{0{,}216}-\sqrt[5]{-0{,}01024}$;

в) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}+\sqrt{12{,}25}$.

Задание 4

Сравнить

$2\sqrt{5}$ $5\sqrt{2}$

$4\sqrt{3}$ $3\sqrt{4}$

Задание 5

Упростить

1. $\dfrac{\left(\sqrt[2]{a^2b^3}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{18}b^6}}}$, где $a > 0$, $b > 0$

Задание 6.

Решить иррациональные уравнения.

1) $\sqrt{6x-4}=1$

2) $\sqrt{x^2-7x-9}=3$

3) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{x-5}$

4) $\sqrt{x^2-3x}=x+3$

Литература:

Основные источники:

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для

общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев и др. 2016.

2. Алгебра и начала анализа, часть 1 А.Г.Мордкович 2015.

3. Сборник задач по математике А.Г.Мордкович 2015.

Дополнительные источники

1 Математика А.А. Дадаян 2015.

Интернет-ресурсы:

1. Математика: учебник / М.И. Башмаков. — М.: КноРус, 2017. — 394 с. — СПО. - URL: http://www.book.ru

Приложение

Таблица степеней

a^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000
11	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601
12	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61917364224

Домашнее задание:

Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№4

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Критерии оценивания работы обучающихся на лабораторной работе

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки:

значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 4

Нахождение значений степеней с рациональными показателями.

Цель: Закрепить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:

1. Закрепить знания по теме «Степени».
2. Применить умения по выполнению расчетов с рациональным показателем.
3. Научить применять полученные умения и знания на практике.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Теоретический материал

Степенью называется выражение вида: a^c, где: a— основание степени; c— показатель степени.

Свойства степеней

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \qquad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$a^0 = 1$, a ≠ 0; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, a ≠ 0;

Пример. $5^{-1} = \frac{1}{5}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$

Корень n-й степени из числа a— это число, n-я степень которого равна a.

Если n— чётно.

- Тогда, если a < 0 корень n-ой степени из a не определен.
- Или если a ≥ 0, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется арифметическим корнем n-ой степени из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$

Если n— нечётно.

- Тогда уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a.

Пример 4.

$\sqrt[4]{10000} = 10,\ \sqrt[5]{-243} = -3,\ \sqrt[6]{64} = 2.$

Основные свойства корней.

Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a.

Для a>0 и b>0 и натуральных чисел n, m, k выполняются следующие соотношения:

1. $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
5. $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$
6. $\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = (\sqrt[n]{a^m})$
7. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{matrix} |a| & \text{если } n \text{ – четное} \\ a & \text{если } n \text{ – нечетное} \end{matrix}$
8. для любых a и b, таких что $0 \le a \le b$ верно неравенство: $\sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{b}$

Практические задания

Вариант 1

1. Вычислить: $\sqrt[3]{125} - 2\cdot\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$
2. Вычислить: а) $\sqrt[5]{243\cdot 32}$; б) $\sqrt[8]{\frac{128}{0,5}}$; в) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$; г) $(-2\sqrt[4]{5})^4$
3. Сравнить числа $\sqrt{6}$ и $\sqrt[4]{35}$
4. Упростите выражение, считая, что переменные принимают только положительные значения: а) $\sqrt[3]{\frac{27\,a^5}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a\,b^{11}}{8}}$; б) $\sqrt[4]{b} : \sqrt{b^3}\cdot\sqrt{\sqrt{b^{13}}}$
5. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[5]{96\,m^7n^{-12}}$, $m \ge 0, n > 0$ б) $\sqrt[4]{625\,a^4b^5}$, $a < 0, b \ge 0$

6. Внести множитель под знак корня $2a\cdot\sqrt[4]{3a}$, $a > 0$
7. Расположите числа $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$ в порядке возрастания.
8. Упростите выражение: а) $\sqrt[5]{c\cdot\sqrt[4]{c}}\cdot\sqrt[4]{c^{-1}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x}+2} - \sqrt[3]{x}$
9. Освободите знаменатель от иррациональности: $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$

Вариант 2

1. Вычислить: $\sqrt[4]{256}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

2. Вычислить: а) $\sqrt[3]{125\cdot 216}$; б) $\frac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{5}}$; в) $\sqrt[3]{54\cdot 4}$; г) $(-2\sqrt[5]{5})^5$

3. Сравнить числа $\sqrt[8]{63}$ и $\sqrt[4]{8}$

4. Упростите выражение, считая, что переменные принимают только положительные значения: а) $\sqrt[4]{\frac{16\,a^6}{c^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{625c^{11}}{a^{18}}}$; б) $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[3]{x^5}:\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

5. Вынести множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt[3]{135\,m^{-7}n^5}$, $m>0$, $n\geq 0$ б) $\sqrt[6]{729\,c^8d^6}$, $d<0$, $c\geq 0$

6. Внести множитель под знак корня $2b\cdot\sqrt[5]{5b^2}$, $b>0$

7. Расположите числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$ в порядке возрастания

8. Упростите выражение: а) $\sqrt[6]{x\cdot\sqrt[5]{x}}\cdot\sqrt[5]{x^{-2}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{y^4}-9}{\sqrt[5]{y^2}-3}-\sqrt[5]{y^2}$

9. Освободите знаменатель от иррациональности: $\frac{12}{\sqrt[3]{16}}$.

Практические задания

Вариант 1

1. Вычислите: а) $\sqrt{0{,}64}+\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}+\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}\cdot\sqrt[5]{2^{12}\cdot 7^3}$

2. Упростите выражение $\left(2\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)^2+4\sqrt[12]{a^7b^8}\div\sqrt[12]{a^5b^6}$

3. Вычислите значение выражения $\sqrt[4]{625c^4}-\sqrt[5]{32c^5}+\sqrt{36c^2}$ при $c=-\frac{1}{13}$

4. Вычислите: а) 4^{-3}; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; в) $16^{\frac{1}{4}}-125^{\frac{1}{3}}$; г) $\left(2+3^{\frac{2}{3}}\right)\left(4-2\cdot 3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)$

5. Упростите выражения: а) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^{-2{,}5}$; б) $a^{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt[14]{a^5}$

6. Упростите выражение $\left(\frac{3}{a-3a^{0{,}5}}-\frac{a^{1{,}5}}{a^2-9a}\right)\div\frac{a^{0{,}5}}{a^{0{,}5}+3}$

Вариант 2

1. Вычислите: а) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt[3]{-4\frac{12}{125}}+\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{3^5\cdot 7^3}\cdot\sqrt[4]{3^3\cdot 7}$

2. Упростите выражение $\left(\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}\right)^2-6\sqrt[8]{x^5y^7}\div\sqrt[8]{x^3y^5}$

3. Вычислите значение выражения $\sqrt[4]{81y^4}-\sqrt[5]{32y^5}+\sqrt{16y^2}$ при $c=-\frac{2}{9}$

4. Вычислите: а) 4^{-2}; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; в) $27^{\frac{1}{3}} - 25^{\frac{1}{2}}$; г) $\left(1-2^{\frac{4}{3}}\right)\left(1+2^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{8}{3}}\right)$

5. Упростите выражения: а) $\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^{-1,25}$; б) $a^{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[8]{a^3}$

6. Упростите выражение $\left(\frac{4}{b-4b^{0,5}} - \frac{b^{1,5}}{b^2-16b}\right) \cdot \frac{b^{0,5}}{b^{0,5}+4}$

Контрольные вопросы

1. Понятия рациональные показатели?
2. Свойства степеней?

Домашнее задание:

Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№4

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Критерии оценивания работы обучающихся на лабораторной работе

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 5 Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.

Цель: отработать навыки вычисления логарифмов, преобразования простейших логарифмических выражений, решения простейших логарифмических уравнений.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

1. Теоретический материал.

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b (числа **b, a – положительные, a≠ 1).**

Если $a^c = b$,то $\log_a b = c$

$a^{\log_a b} = b$ → основное логарифмическое тождество

Свойства логарифмов справедливы для логарифмов по любому основанию(a >0 ; a≠ 1**):**

1. $\log_a 1=0$
2. $\log_a a=1$
3. $\log_a a^k=k$
4. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$
5. $\log_a(x/y)=\log_a x - \log_a y$
6. $\log_a b^k=k\cdot\log_a b$

Основание логарифма и число под знаком логарифма можно поменять местами по формуле:

$\log_a b=1/\log_b a$

Общая формула перехода к логарифму по другому основанию.

$\log_a b=\log_c b/\log_c a$

Логарифм по основанию a^n.

$\log_{a^n} b=(1/n)\cdot\log_a b$

Логарифм числа **b** по основанию a^n равен произведению дроби **1/n** на логарифм числа **b** по основанию **a**.

Примеры решения задач.

Пример 1. Вычислите $\log_2 8$

Решение: $\log_2 8 = 3$.(т.к. $2^3 = 8$)

Пример2. Вычислите $\log_5 25$.

Решение: $\log_5 25 = 2$

Пример 3. Вычислите $\log_6 \frac{1}{36}$

Решение.$\log_6 \frac{1}{36} = -2$ (т.к. $6^{-2} = \frac{1}{36}$)

3. Вычислите: ($lg72-lg9$)/($lg28-lg7$).
4. Решение:
5. используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем
6. $lg72-lg9=lg(72/9)=lg8=lg2^3=3$
7. ***Пример 4.***

Пример 4.

Вычислите: ($lg72-lg9$)/($lg28-lg7$).

Решение:

используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg72-lg9=lg(72/9)=lg8=lg2^3=3lg2;$$

$lg28-lg7=lg(28/7)=lg4=lg2^2=2lg2$.

Итак,

$(lg72-lg9)/(lg28-lg7)=(3lg2)/(2lg2)=3/2=1,5$

Задания для самостоятельной работы:

1.Вычислите значение выражения

а) $\log_5 \frac{1}{25}$

б) $\log_3 81$

в) $\log_8 12 + \log_8 \frac{1}{3}$

г) $\log_3 66 - \log_3 22$

д) $\log_{98} 1$

е) $\frac{\log_4 25}{\log_4 5}$

ж) $(2\log_{12}2 + \log_{12}3)(2\log_{12}6 - \log_{12}3)$

з) $5^{\log_5 8+1}$

и) $\log_2(-2)$

2. Найдите x, если

а) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{8}) = x$

б) $\log_x 0{,}125 = -3$

в) $\log_{16} x = -\frac{3}{4}$

г) $\log_6 x = -2$

д) $\log_3 x = 2\log_3 12 - \log_3 6 + \log_3 5$

3.Найдите $\log_a x$, если $\log_a в = 4, \log_a c = 2$

$X = \frac{a^2 в}{c}$; $x = a^2\sqrt{в}$

Контрольные вопросы:

1. Понятиелогарифма?
2. Свойства логарифмов?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№6

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Практическое занятие № 6
Логарифмирование и потенцирование.

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение логарифма числа;
- формулы основного логарифмического тождества, логарифма произведения, частного, степени, перехода от одной системы логарифмов к другой;

уметь:

- вычислять значения несложных логарифмических выражений.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. $log_a b=x \rightarrow a^x=b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{log_a b}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq 0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a>0$ ($a\neq 0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $log_a 1=0$.

3. $log_a a=1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $log_a xy=log_a x+log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $log_a(x/y)=log_ax-log_ay$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $log_ax^k=klog_ax$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $log_ax=log_bx/log_ba$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq0$, $b>0$ и $b\neq1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$log_bx=log_b(a^{log_ax})$, откуда $log_bx=log_ax\cdot log_ba$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Пример 1.

Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}$.

Решение:

вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\log_{13}\sqrt[5]{169}=x, \qquad \log_{11}\sqrt[3]{121}=x,$$
$$13^x=\sqrt[5]{169}, \qquad 11^x=\sqrt[3]{121},$$
$$13^x=\sqrt[5]{13^2}, \qquad 11^x=\sqrt[3]{11^2},$$
$$13^x=13^{\frac{2}{5}}, \qquad 11^x=11^{\frac{2}{3}},$$
$$x=\frac{2}{5}. \qquad x=\frac{2}{3}.$$

Вернемся в пример: $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6+10}{15}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15.}$

Пример 2.

Вычислите, используя основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2-1}$.

Решение:

используя свойство степени, разложим данное выражение на множители:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}.$$

Используя 6 свойство логарифма степени, имеем:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}=10^{\lg 2^3}\cdot\frac{1}{10}.$$

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}=10^{\lg 2^3}\cdot\frac{1}{10}=2^3\cdot\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

Задания для закрепления и отработки навыков решения:

1. Вычислить: $\frac{3\log_7 2-\log_7 24}{\log_7 3+\log_7 9}$.

2. Найти x: $\lg x=\frac{\log_5 27-2\log_5 3}{\log_5 45+\log_5 0{,}2}$.

3. Упростить выражение: $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}$.

4. Прологарифмировать выражение $10^{-4}a^2b^5c^{\frac{2}{3}}$ по основанию 10.

5. Сравнить:
   А) 5^{200} и 2^{500},
   Б) $\log_4\sqrt{2}$ и $\log_3\frac{1}{81}$,
   В) $\log_3 2+\log_3 7$ и $\log_3(2+7)$.

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите:

1 вариант 1) $\log_{16}0{,}5$; 2) $100^{\lg\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\lg 4}{\lg 64-\lg 8}$.	**2 вариант** 1) $\log_{64}(1/16)$; 2) $5^{-6\log_5 2}$; 3) $\frac{\lg 4}{\lg 16-\lg 8}$.	**3 вариант** 1) $\log_4 8^7$; 2) $36^{0{,}5-\log_6\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\lg 3+\lg 27}{\lg 9}$.
4 вариант 1) $\log_{0.2}0{,}08$; 2) $49^{\frac{1}{2}+\log_7 2}$; 3) $\frac{\lg^2 7-1}{\lg 70}$.	**5 вариант** 1) $\lg 0{,}01$; 2) $4^{\log_2 3+2\log_4\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1-\lg^2 3}{\lg 30}$.	**6 вариант** 1) $\log_5 0{,}04$; 2) $0{,}01^{\lg\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\log_2 64}{\log_2\sqrt{16}}$.
7 вариант 1) $\log_{\sqrt{2}}8$; 2) $25^{\log_5 3-\log_{25}27}$; 3) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$.	**8 вариант** 1) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}}27$; 2) $100^{\lg\sqrt{5}+\lg 10}$; 3) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$.	**9 вариант** 1) $\log_3\frac{1}{243}$; 2) $1000^{\lg 10-\lg\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}+\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№6

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 7
Преобразование выражений, содержащих степени.

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные показательные тождества;
- свойства степеней с действительными показателями;

уметь:

вычислять степени с действительными и рациональными показателями.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}};\ a^{-n}=1/(a^n);\ a^0=1,\ a\neq 0;\ a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$m\in \boldsymbol{Z},\ n\in \boldsymbol{N},\ n\geq 2.$$

Повторим свойства степеней с рациональным показателем:
при любых x и y справедливы равенства:

$$a^xa^y=a^{x+y};$$
$$a^x/a^y=a^{x-y};$$
$$(a^x)^y=a^{xy};$$
$$(ab)^x=a^xb^x;$$
$$(a/b)^x=a^x/b^x.$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y}=a^{(xk)/(yk)}$, $a>0$, y, $k \in \boldsymbol{N}$, $x \in \boldsymbol{Z}$.

2. $a^x>0$, $a>0$, $x \in \boldsymbol{R}$ (любая степень положительного числа положительна).

3. $a^x>1$ при $a>1$, $x>0$.

4. $a^x<1$ при $a>1$, $x<0$.

5. $1^x=1$ (любая степень единицы равна единице).

6. $a^x<1$ при $0<a<1$, $x>0$.

7. $a^x>1$ при $0<a<1$, $x<0$.

8. Если $a>1$, $a\neq1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x=b$ при $b>0$.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнении и неравенств:

10. Если $a^x=a^y$, то $x=y$ при $a>0$, x, $y\neq1$.

11. Если $a^x<a^y$, то $x<y$ при $a>0$.

12. Если $a^x<a^y$, то $x>y$ при $0<a<1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

13. $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$.

14. $a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}$.

15. $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.

16. $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$ при $a>0$, $b>0$.

17. $|ab|^{\alpha}=|a|^{\alpha}|b|^{\alpha}$ при $ab>0$.

18. $(a/b)^{\alpha}=a^{\alpha}/b^{\alpha}$ при $a>0$, $b>0$.

19. $|a/b|^{\alpha}=|a|^{\alpha}/|b|^{\alpha}$ при $ab>0$.

Формулы, обратные формулам 1-7, так же верны.

Пример 1.

Вычислите: $\dfrac{7^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot3^{-2}}{5^{-1}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение:

упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot49^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{\frac{1}{5}-9^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{\frac{1}{64}}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-\sqrt{9}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot7-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-3}=$$

$$==\frac{1-\frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}}=\frac{\frac{72}{72}-\frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}}=\frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)}=\frac{71}{72}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)=-\frac{355}{1008}.$$

Пример 2.

Вычислите: $\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}$.

Решение:

упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{\left(2^6\right)^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{2^{-2}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}-\frac{1}{2}}{2^{1,5}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{\frac{1}{20}-\frac{1}{2}}{4}=$$

$$=\frac{-\frac{9}{20}}{4}=-\frac{9}{80}.$$

Выполнить действия с рациональной степенью:

1. Вычислить:

   А) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$, Б) $81^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.
2. Упростить выражение:

   А) $\frac{a-в}{a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}}$, Б) $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}:\frac{x^{-1}y^{-1}}{(y-x)^{-1}}$.
3. Сравнить числа:

   А) $\sqrt[3]{6^5}$ и $6^{1,7}$, Б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ и $\sqrt{2}*2^{\frac{3}{14}}$.
4. Представить выражение в виде корня: $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}}$.
5. Представить выражение в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[7]{b^3}*\sqrt[4]{b}$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Вычислите: 1) $2\cdot 2^{-3}$; 2) $\frac{\left(3^{-2}\right)^3\cdot 27^2}{3}$. №2. Упростите: $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}$.	**2 вариант** №1. Вычислите: 1) $5^{-2}\cdot 5$; 2) $\frac{\left(2^{-2}\right)^4\cdot 16^2}{2^3}$. №2. Упростите: $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$.	**3 вариант** №1. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 2) $3\sqrt[3]{-27}+0,1\sqrt[4]{81}-\sqrt{1}$. №2. Упростите: $x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}$.
4 вариант №1. Вычислите: 1) $\left(\sqrt{5}\right)^{-8}$;	**5 вариант** №1. Вычислите:	**6 вариант** №1. Вычислите:

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. №2. Упростите: $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 y^{\frac{5}{2}}$.	1) $5\cdot 8^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-12}$. №2. Упростите: $\dfrac{c^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}$.	1) $36^{\frac{1}{2}}\cdot 2$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$. №2. Упростите: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} x^{\frac{2}{3}}$.
7 вариант №1. Вычислите: 1) $16^{-\frac{1}{2}}$; 2) $5\sqrt[4]{16}-0{,}2\sqrt[3]{-0{,}027}+\sqrt[5]{1}$. №2. Упростите: $a^{\frac{7}{2}}\sqrt{a}$.	**8 вариант** №1. Вычислите: 1) $27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{32\cdot 0{,}00001}$. №2. Упростите: $y^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{y}$.	**9 вариант** №1. Вычислите: 1) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot 16}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$. №2. Упростите: $2\sqrt[3]{\sqrt{a}}-\sqrt[6]{ab}:\sqrt[6]{b}$.

Контрольные вопросы

1.Свойства степеней?
2. Понятие тождества?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№6

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.
2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 8
Контрольная работа по теме: «Корни, степени, логарифмы»

Цель: Закрепить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:

1. Закрепить знания по теме «Степени,корни,логарифмы».
2. Применить умения по выполнению расчетов.
3. Научить применять полученные умения и знания на практике.

Контрольная работа по теме «Корни, степени, логарифмы»

В1

1. Вычислить
   a. $(\log_4 0{,}4 + \log_4 40)^3 + \log_5 25 \cdot \log_2 128$
   b. $14^{\log_{14} 3} + \log_3 81$
   c. $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24}$
   d. $4^{2,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot (0{,}8)^{3,5}$
2. Найдите значение выражения $\log_3(9b)$, если $\log_3 b = 5$.
3. Упростите выражение

   $$x^{\frac{1}{5}} + \frac{9 - x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} + 3}$$

4. Решить уравнения:
   a. $\log_3(4x - 2) = \log_3(13 - x)$
   b. $\log_2(x^2 - 5x + 7) = 0$
   c. $\sqrt{5x + 4} = 7$
   d. $\sqrt{-8 + 6x} = -x$
   e. $2^{2x+1} = 32^{3-x}$
   f. $2^{x^2 - 7x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
5. Решить неравенства:
   a. $3^{2x-2} > 9$
   b. $\log_3(3x - 3) < 3$
   c. $\sqrt{5x - 4} > 4$

Контрольная работа по теме «Корни, степени, логарифмы»

В2

1. Вычислить
   a. $(\log_5 50 + \log_5 0{,}5)^3 + \log_6 216 \cdot \log_2 256$

b. $4^{\log_4 5} + \log_9 81$

c. $\sqrt{125} \cdot \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}}$

d. $9^{1,5} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} + \left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot (1,2)^{4,5}$

2. Вычислите $\log_2 \frac{b}{16}$, если $\log_2 b = 3$.
3. Упростите выражение:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} - x^{\frac{1}{3}}$$

4. Решить уравнения:
   a. $\log_4(6x - 7) = \log_4(13 + x)$
   b. $\log_3(x^2 - 7x + 13) = 1$
   c. $\sqrt{3x - 2} = 25$
   d. $\sqrt{-8 + 9x} = x$
   e. $4^{2x-1} = 64^{3-x}$
   f. $2^{x^2-5x} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$
5. Решить неравенства:
   a. $2^{4x-2} > 4$
   b. $\log_2(3x - 13) < 3$
   c. $\sqrt{5x - 4} > 4$

Контрольная работа по теме «Корни, степени, логарифмы»

В3

1. Вычислить
   a. $(\log_4 0,2 + \log_4 80)^3 + \log_5 125 \cdot \log_2 64$
   b. $4^{\log_4 3} + \log_9 81$
   c. $\sqrt[3]{18} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{16}$
   d. $25^{2,5} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1,5} + \left(\frac{4}{3}\right)^{3,5} \cdot (0,6)^{3,5}$
2. Найдите значение выражения $\log_3(27b^2)$, если $\log_3 b = 2$.
3. Упростите выражение

$$x^{\frac{1}{5}} + \frac{16 - x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} + 4}$$

4. Решить уравнения:
   a. $\log_3(6x - 2) = \log_3(19 - x)$
   b. $\log_2(x^2 - 6x + 6) = 0$
   c. $\sqrt{5x - 4} = 4$

d. $\sqrt{-1+2x} = -x$
e. $3^{2x+1} = 27^{3-5x}$
f. $2^{x^2-7x} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$

5. Решить неравенства:
   a. $0{,}3^{2x-2} > 0{,}09$
   b. $\log_2(3x-4) < 3$
   c. $\sqrt{10x-4} > 4$

Контрольная работа по теме «Корни, степени, логарифмы»

В4

1. Вычислить
   e. $(\log_5 10 + \log_5 2{,}5)^3 + \log_7 343 \cdot \log_2 512$
   a. $24^{\log_{24} 35} + \log_9 729$
   b. $\sqrt{27} \cdot \sqrt[5]{32} - 3^{\frac{1}{2}}$
   c. $4^{1,5} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} + \left(\frac{5}{3}\right)^{4,5} \cdot (0{,}6)^{4,5}$
2. Вычислите $\log_2 \frac{b^3}{16}$, если $\log_2 b = 3$.
3. Упростите выражение:
   $$\frac{5x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} - 5x^{\frac{1}{3}}$$
4. Решить уравнения:
   a. $\log_{0,4}(3x-7) = \log_{0,4}(19+x)$
   b. $\log_5(x^2+7x+15) = 1$
   c. $\sqrt{3x+1} = 5$
   d. $\sqrt{-2+3x} = x$
   e. $128^{2x-1} = 64^{3-2x}$
   f. $5^{x^2-5x} = \left(\frac{1}{25}\right)^3$
5. Решить неравенства:
   a. $2^{4x-2} > 8$
   b. $\log_{0,2}(3x-1) < 0$
   c. $\sqrt{5x-1} > 7$

Контрольные вопросы

1. Свойства степеней?
2. Свойства корней?
3. Свойства логарифмов?
4. Понятие логарифмические тождества?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№9

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 9

Признаки взаимного расположения прямых.

Цель работы: Обобщить и систематизировать знания по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Нахождение углов между прямыми в пространстве. закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.»

Теоретические сведения к практической работе:

Теорема

Две прямые называются скрещивающимися,если одна из них лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскостьв точкене принадлежащей 1 прямой.

Определение.

2 прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются

Определение.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

Задание для самостоятельного решения:

Вариант 1.

1) Треугольники АВС и АДС лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону АС. Точка

Р – середина стороны АД, точка К – середина ДС.

а) Каково взаимное расположение прямых РК и АВ?

б) Чему равен угол между прямыми РК и АВ, если угол АВС равен 40º, а угол ВСА = 80º. Ответ обобщите.

2) Прямые а и в лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого возможного случая.

3) Точка В не лежит в плоскости Δ АДС. Точки M, N и Р – середины отрезков ВА, ВС, ВД соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (АДС) параллельны; б) Найдите площадь треугольника MNP, если SΔАДС = 48 см2 .

Вариант 2.

1) Основание трапеции АВСД лежит в плоскости α. Через точки В и С проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках Е и F соответственно.

1) Каково взаимное расположение EF и АВ?

2) Чему равен угол между прямыми EF и АВ, если угол АВС = 150º. Ответ обоснуйте.

2) Прямые а и в лежат в пересекающихся плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого случая.

3) В тетраэдре ДАВС точки M, N и Р – середины рёбер ДА, ДВ, ДС соответственно.

а) Доказать, что плоскости (MNP) и (АВС) параллельны.

б) Найти площадь Δ АВС, если SΔMNP = 14 см2 .

Контрольные вопросы:

1. Какие две прямые в пространстве называются параллельными?

2. Какие две плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте теорему о параллельности прямой и плоскости.

2 часть

Определение. Подуглом между двумя прямыми понимается один из двух смежных углов, образованных при их пересечении. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны κ_1 и κ_2, вычисляется по формуле $tg = \pm\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, (1)

причем знак "плюс" соответствует острому углу φ, а знак "минус"- тупому.

Заметим, что если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Оу, то формула (1) не имеет смысла. В этом случае острый угол φ вычисляется непосредственно по формуле $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$, где φ_1 и φ_2- углы наклона прямых к оси Ох.

Примеры

Найти острый угол между прямыми $x - 3y + 5 = 0$и $2x + 4y - 7 = 0$

Решение.

Угловые коэффициенты данных прямых таковы:$k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Тангенс острого угла между этими прямыми найдем по формуле (1): $tg\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})}\right| = 1$ Отсюда φ=45°

Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант 1.

1. Вычислить острый угол между прямыми:

1) $y = 3x - 5$ и $y = -2x + 3$; 2) $8x - 2y - 5$ =0 и $2x - 2y + 1 = 0$;

2. Найти острый угол между прямыми $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(1; -1)$и $B(5;7)$.

3. Стороны треугольника заданы уравнением $3x - 2y = 6 = 0\ (AB); 2x + y - 10 = 0\ (BC); x - 3y + 2 = 0(AC)$. Найдите углы, которые медиана, проведенная из точки В, образует со сторонами АВ и ВС.

4. Найти внутренние углы треугольника АВС с вершинами А(1;2), В(2;2), С(0;3).

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точу М(-1;2) и составляющий угол 45° с прямой $x - 3y + 2 = 0$

Вариант 2.

1. Вычислить острый угол между прямыми:

1) $y = 3x - 5$ и $y = -2x + 3$; 2) $8x - 2y - 5$ =0 и $2x - 2y + 1 = 0$;

2. Противоположные вершины квадрата находятся в точках В(-2;2) и D(0:-3). Составить уравнения сторон квадратов.

3. Найти острый угол между прямыми $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(1; -1)$и $B(5;7)$.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике АВС даны вершина острого угла А(1;3) и уравнение противолежащего катета: $2x - y + 4 = 0(BC)$. Составить уравнение двух других сторон треугольника.

5. Найти острый угол между прямыми $9x+3y-7=0$ и прямой, проходящей через точку $A(1;-1)$и $B(5;7)$.

› ***Контрольные вопросы:***

1.Угол между двумя прямыми, определение.

2. Формула нахождения tgφ.

3. Какому углу соответствуют "+" и "-" в формуле.

4. Формула нахождения угла φ, если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Oy.

3 часть

Теоретические сведения к практической работе:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

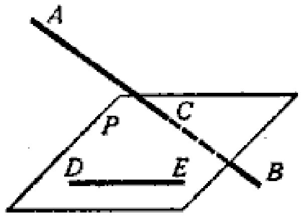
2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые



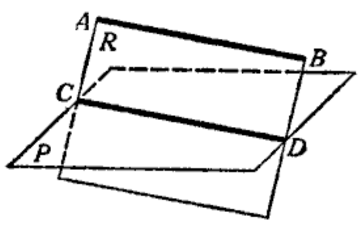
Возьмём, например, две такие прямые *AB* и *DE*, из которых одна пересекает некоторую плоскость *P*, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (*C*) пересечения первой прямой и плоскости P.

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку *C* проходили бы две различные плоскости: одна *P*, пересекающая прямую *AB*, и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

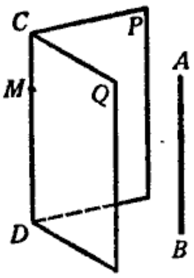
Прямая и плоскость параллельные между собой



Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

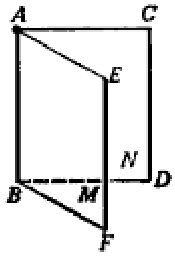
Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).



Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

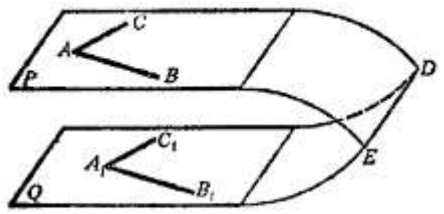
Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.



Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости(Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q.



Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данные прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая a и точка M. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a?

4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?

5) В пространстве даны две параллельные прямые a и b. Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b?

6) Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через a, а другая – через b?

7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые a, b и не лежащая на них точка M. Сколько существует плоскостей, проходящих через M и параллельных прямым a и b?

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№9

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала,

руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 10
Перпендикуляр и наклонная к плоскости.

Цель: - обобщить изученный материал;
- закрепить навык решения задач на нахождение расстояний между прямой и плоскостью, между прямыми, точкой и плоскостью.

Теоретическая часть

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

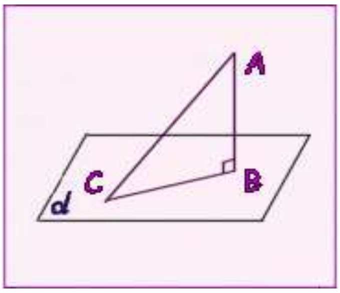
Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра.**

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной.**

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной.**



На рисунке из точки А проведены к плоскости перпендикуляр АВ и наклонная АС. Точка В - основание перпендикуляра, точка С - основание наклонной, ВС - проекция наклонной АС на плоскость .

Теорема о трёх перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.

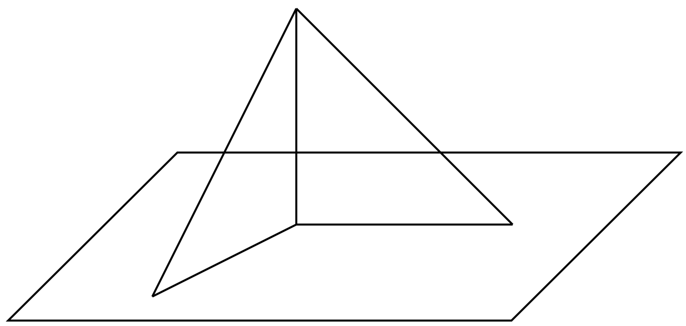
Обратная теорема: Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Выполните задания
1 вариант

Решите задачи

1. Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых *20см* и *15см.* Их проекции на эту плоскость относятся как $16 : 9$. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

а) 20см;



б) $6\sqrt{2}$ см;

в) 13см;

г) 12см.

2. Постройте плоскость и точку А вне ее. Из этой точки построить две наклонные АВ и АС и их проекции на плоскость BD и CD. Найти расстояние от точки А до плоскости, если $AB = 23см, AC = 33см, BD : CD = 2 : 3;$

3. Из вершины равностороннего треугольника АВС восстановите перпендикуляр AD к
плоскости треугольника. Найти расстояние от точки D до стороны ВС, если
$AD = 13см, BC = 6см;$

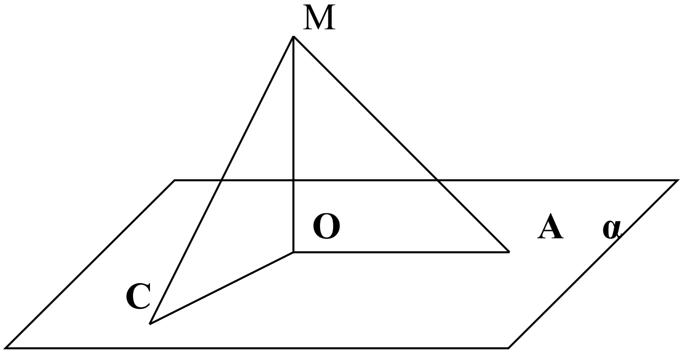
4. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 17 см и 15 см. Проекция одной из них на 4 см больше проекции другой. Найдите проекции наклонных.

5. Из вершины А прямоугольника ABCD восстановите перпендикуляр АК к его плоскости. Найти длину перпендикуляра АК, если:
$KB = 9см, KC = 12см, KD = 16см$

2 вариант

Решите задачи

1. Из точки *M* к плоскости *α* проведены две наклонные, длины которых относятся как
13 : 15. Их проекции на эту плоскость равны 10 см и 18 см.. Найдите расстояние от
точки *M* до плоскости α.



а) 34 см;

б) 24 см;

в) 32 см;

г) 23 см.

2. Постройте плоскость и точку А вне ее. Из этой точки построить две наклонные АВ и
АС и их проекции на плоскость BD и CD. Найти расстояние от точки А до плоскости, если $AB = 21см, AC = 30см, BD : CD = 3 : 6.$

3. Из вершины равностороннего треугольника ABC восстановите перпендикуляр AD к
плоскости треугольника. Найти расстояние от точки D до стороны BC, если
$AD = 10 см, BC = 6 см.$

4. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Проекция одной из них на 9 см больше проекции другой. Найдите проекции наклонных.

5. Из вершины A прямоугольника ABCD восстановите перпендикуляр AK к его плоскости. Найти длину перпендикуляра AK, если:
$KB = 6 см, KD = 7 см, KC = 9 см$

Контрольные вопросы:
1. Понятие перпендикуляр?
2. Понятие Расстоянием от точки до плоскости называется?
3. Понятиея наклонной?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№9

Интернет-ресурсы:
1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:
1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.
2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала,

руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

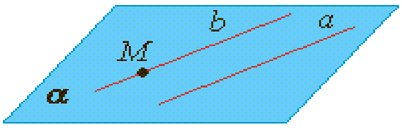
Практическое занятие № 11 Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.

Цель: - обобщить изученный материал;
- закрепить навык применения изученных теорем при решении задач.

Теоретическая часть

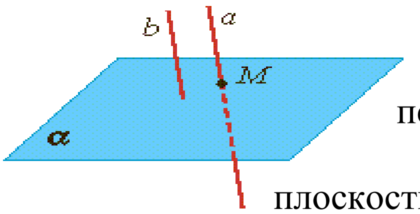
Определение: Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема о параллельных прямых.



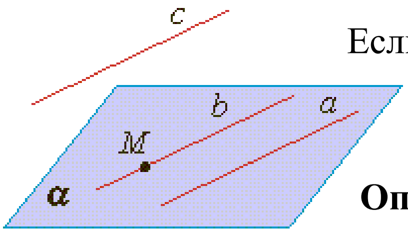
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Свойство параллельных прямых.



Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

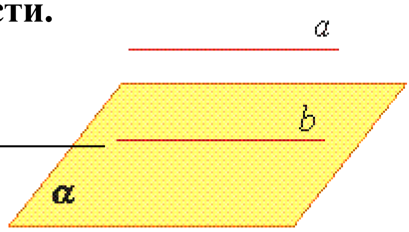
Теорема о трёх прямых в пространстве.



Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$).

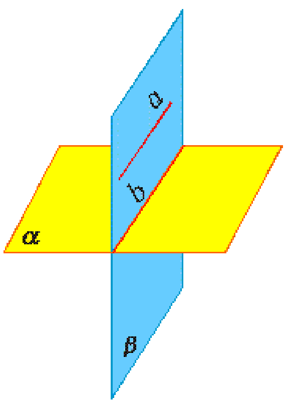
Определение: Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости.



Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Теорема:

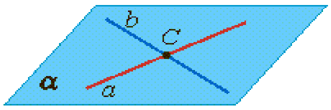
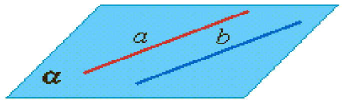
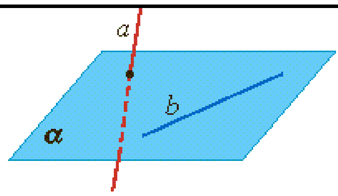


Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

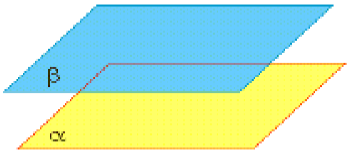
Теорема:

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая, либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Взаимное расположение прямых в пространстве

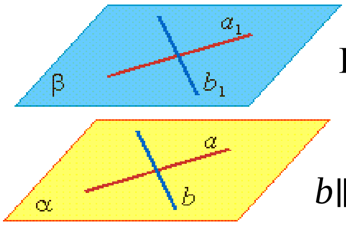
 **Пересекающиеся прямые:** лежат в одной плоскости, имеют одну общую точку.	 **Параллельные прямые:** лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)	 **Скрещивающиеся прямые:** не лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)

Определение: Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, т.е.
не имеют   ни одной общей точки.



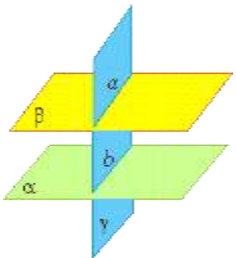
$\alpha \parallel \beta$

Признак параллельности двух плоскостей.

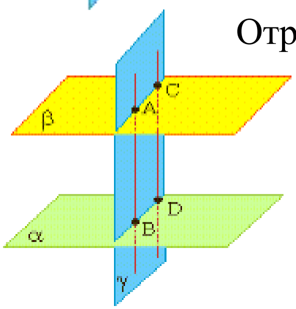


Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Если $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$.

Свойства параллельных плоскостей.



Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.
Если $\alpha \parallel \beta$ и они пересекаются с γ, то $a \parallel b$.



Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.
Если $\alpha \parallel \beta$ и $AB \parallel CD$, то $AB = CD$.

Выполните задания

1 вариант

Выберите верный ответ

1. Плоскость α пересекает стороны АВ и АС треугольника АВС соответственно в точках К и Р. Известно, что ВС // α , тогда прямые ВС и КР

а) пересекаются; б) параллельны; в) скрещиваются.

2. Точка К не лежит в плоскости треугольника BDC, точки А, М, и Р – середины отрезков КВ, KD, КС соответственно. Каково взаимное расположение плоскостей BDC и АМР ?

а) плоскости параллельны; б) плоскости пересекаются; в) их расположение определить нельзя.

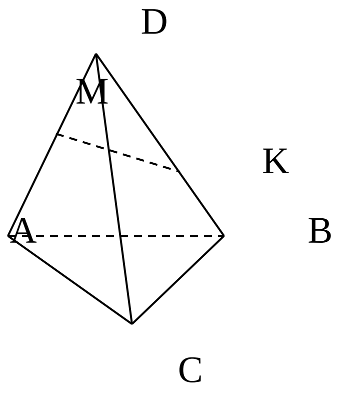
3. Прямые *а* и *в* лежат в параллельных плоскостях, следовательно эти прямые

а)скрещиваются или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются; г) только параллельны.

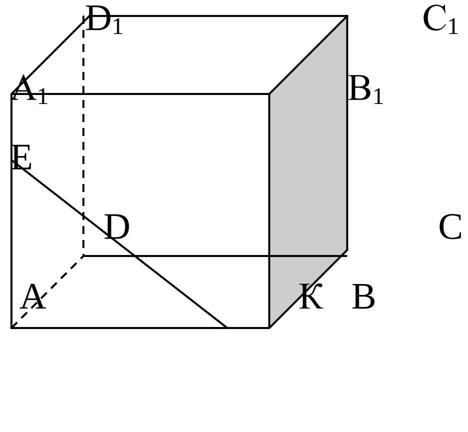
4. В тетраэдре DABC точка М лежит на ребре AD, а точка К на ребре DB. Точка пересечения прямой МК и плоскости АВС лежит на прямой

а) ВС; б) АВ; в) АС; г) DC.



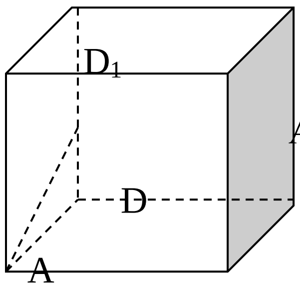
5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка Е лежит на ребре AA_1, а точка К – на ребре АВ. Точка пересечения прямой ЕК с плоскостью грани BB_1C_1C лежит на прямой

а) ВС; б) B_1C_1; в) BB_1; г) CC_1.



6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость, проходящая через прямую AM и вершину B пересекает плоскость грани DD_1C_1C по прямой

а) MC_1; б) MB; в) MC; г) параллельной AB и проходящей через точку M.



7. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если обе они параллельны одной плоскости?

а) только параллельны; б) все случаи взаимного расположения; в) только скрещиваются; г) только пересекаются.

8. Прямая *a* параллельна плоскости *α*. Какое из следующих утверждений верно?

а) прямая *a* параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;

б) прямая *a* не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости *α*;

в) прямая *a* скрещивается со всеми прямыми плоскости *α;*

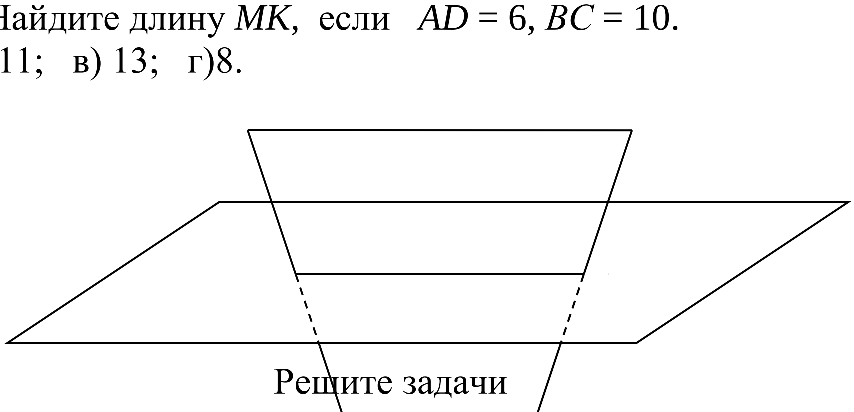
г) прямая *a* имеет общую точку с плоскостью α .

9. Даны трапеция *ABCD* и плоскость α. Диагонали трапеции *AC* и *BD* параллельны плоскости α. Тогда прямая *BA* и плоскость α:

а) параллельны; б) пересекаются; в) определить нельзя; г) прямая *BA* лежит в плоскости.

10. На рисунке плоскость, параллельная основаниям трапеции *ABCD*, пересекает стороны *AB* и *CD* в точках *M* и *K* соответственно. Точка *M* – середина *AB*. Найдите длину *MK*, если *AD* = 6, *BC* = 10.

а) 16; б) 11; в) 13; г)8.



Решите задачи

11. Через концы отрезка *NM*, не пересекающего плоскость α, и точку *K* – середину этого отрезка, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках N_1, M_1, K_1 соответственно. Найдите длину отрезка NN_1, если $MM_1 = 16$, $KK_1 = 9$.

а) 2; б) 5; в) 12; г) 12,5.

12. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно,

прямая m – в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_2B_2, если $A_1B_1 = 12$ см,

$B_1O : OB_2 = 3 : 4$.

2 вариант

Выберите верный ответ:

1. Плоскость α пересекает стороны BC и AC треугольника ABC соответственно в точках M и E. Известно, что AB // α, тогда прямые AB и ME

а) пересекаются; б) параллельны; в) скрещиваются.

2. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки P, O, и M – середины отрезков DA, DB, DC соответственно. Каково взаимное расположение плоскостей ABC и POM ?

а) плоскости параллельны; б) плоскости пересекаются; в) их расположение определить нельзя.

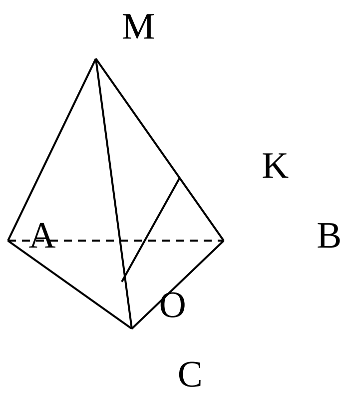
3. Прямые a и $в$ лежат в параллельных плоскостях, следовательно эти прямые

а)скрещиваются или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются; г) только параллельны.

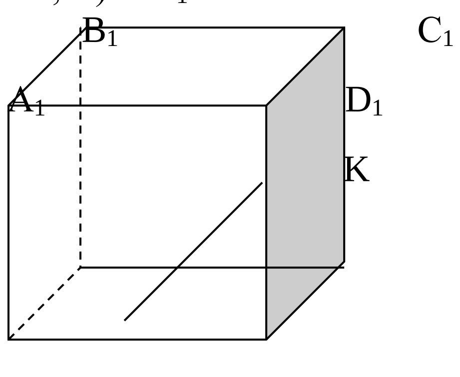
4. В тетраэдре MABC точка O лежит на ребре MC, а точка K на ребре MB. Точка пересечения прямой OK и плоскости ABC лежит на прямой

а) AC; б) AB; в) BC; г) AM.



5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K лежит на ребре DD_1, а точка M – на ребре AD. Точка пересечения прямой MK с плоскостью грани AA_1B_1B лежит на прямой

а) AA_1; б) A_1B_1; в) AB; г) BB_1.

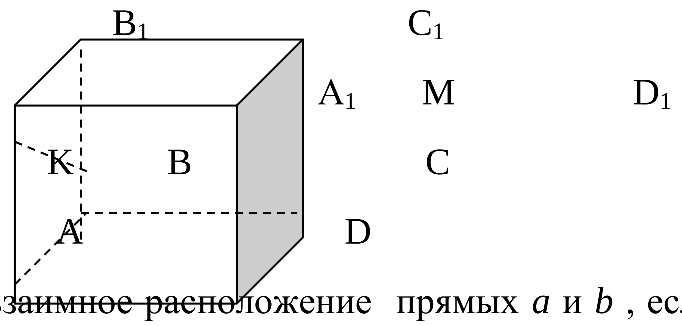


B C

A M D

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость, проходящая через прямую KB и вершину C, пересекает плоскость грани AA_1D_1D по прямой

а) KB_1; б) KB; в) KC; г) параллельной BC и проходящей через точку K.



7. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b параллельна этой плоскости?

а) параллельны или пересекаются;
б) скрещиваются или пересекаются;
в) параллельны или скрещиваются;
г) определить нельзя.

8. Прямая a параллельна плоскости α. Какое из следующих утверждений верно?

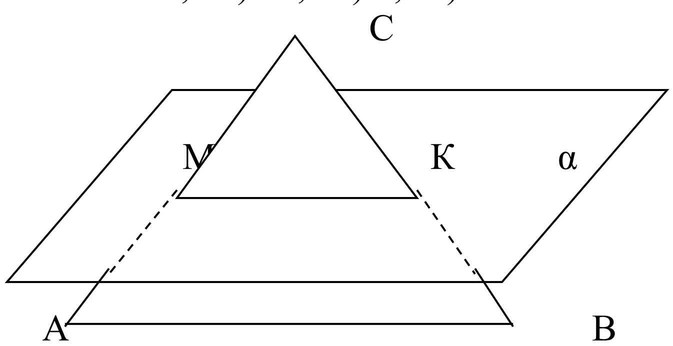
а) прямая a параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;
б) прямая a не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α;
в) прямая a скрещивается со всеми прямыми плоскости α;
г) прямая a имеет общую точку с плоскостью α .

9. Даны треугольник ABC и плоскость α, причём $AB \parallel \alpha$, $AC \parallel \alpha$, тогда прямая BC и плоскость α:

а) параллельны; б) пересекаются; в) определить нельзя; г) прямая лежит в плоскости.

10. На рисунке плоскость, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его стороны в точках M и K соответственно. Точка M – середина AC. Найдите длину AB, если $MK = 10$.

а) определить нельзя; б) 10; в) 5; г)20.



Решите задачи

11. Через концы отрезка AB, не пересекающего плоскость α, и точку C – середину этого отрезка, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Найдите длину отрезка CC_1 , если $AA_1 = 12$, $BB_1 = 6$.

а) 6; б) 9; в) $6\sqrt{2}$; г) $9\sqrt{2}$.

12. Через точку O, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая m – в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $A_2B_2 = 15$ см, $OB_1 : OB_2 = 3 : 5$.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2, зан.3№17

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 12
Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач.

Цели :

***Образовательная*:** создать условия для развития у обучающихся умения формулировать проблемы, предлагать пути их решения, для формирования системы знаний, связанных с понятиями размещений, перестановок и сочетаний,

***Воспитательная*:** содействовать умению общаться между собой; формировать умения делать обобщения на основе полученных данных в результате исследования,

Развивающая. выбирать правильные утверждения из нескольких данных.

Ход работы:

II. Сформулировать правило вычисления с помощью перестановок, размещения, сочетания

Ш. Показать способы применения в повседневной жизни

Общие правила комбинаторики.

Правило суммы: Если некоторый объект A может быть выбран m способами, а объект B- k способами, то объект «либо A, либо B» можно выбрать m+k способами.

Примеры:

1. Допустим, что в ящике находится n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать? ***Ответ:*** n способами.

Распределим эти n шариков по двум ящикам: в первый- m шариков, во второй- k шариков. Произвольным образом из произвольно выбранного ящика вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Из первого ящика шарик можно вынуть m способами, из второго- k способами. Тогда всего способов m+k=n.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов «A и B» можно выбрать m*k способами.

Примеры:

1. Сколько двузначных чисел существует?

Решение: Число десятков может быть обозначено любой цифрой от 1 до 9. Число единиц может быть обозначено любой цифрой от 0 до 9. Если число десятков равно 1, то число единиц может быть любым (от 0 до 9). Таким образом, существует 10 двузначных чисел, с числом десятков- 1. Аналогично рассуждаем и для любого другого числа десятков. Тогда можно посчитать, что существует 9 *10 = 90 двузначных чисел.

2. Имеется 2 ящика. В одном лежит m разноцветных кубиков, а в другом- k разноцветных шариков. Сколькими способами можно выбрать пару «Кубик-шарик»?

Решение: Выбор шарика не зависит от выбора кубика, и наоборот. Поэтому, число способов, которыми можно выбрать данную пару равно m*k.

1. Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

Пронумеруем стулья, на которых должен сесть каждый, и будем считать, что они рассаживаются поочередно:

№1 - Саша - есть возможность выбрать из 5 вариантов (стульев)
№2 - Петя - 4 варианта
№3- Денис - 3 варианта
№4- Оля - 2 варианта
№5 - Настя- 1 вариант

Используя правило умножения, получаем: **5x4x3x2x1=120**

2. В студенческом общежитии в одной комнате живут трое студентов Петя, Вася и Коля. У них есть 6 чашек, 8 блюдец и 10 чайных ложек (все принадлежности отличаются друг от друга). Сколькими способами ребята могут накрыть стол для чаепития (так, что каждый получит чашку, блюдце и ложку)?

Для Пети набор можно набрать 6x8x10=480 способами,

для Васи - 5x7x9=315,

для Коли - 4x6x8=192.

По правилу умножения получаем 480x315x192=**29030400** способами.

Размещениями из n элементов по k называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

- число размещений из n по k.

Число размещений из n по k можно определить следующим способом: первый объект выборки можно выбрать n способами, далее второй объект можно выбрать n-1 способом и т.д.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$$

Преобразовав данную формулу, имеем:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \text{ (называется } n - \text{факториал)}.$$

Следует помнить, что **0!=1.**

Примеры:

1. В первой группе класса. А первенства по футболу участвует 17 команд. Разыгрываются медали: золото, серебро и бронза. Сколькими способами они могут быть разыграны?

Решение: Комбинации команд-победителей отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 17 по 3.

$$A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$$

2. Научное общество состоит из 25-ти человек. Необходимо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Комбинации руководящего состава общества отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 25 по 4.

$$A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!} = \frac{25!}{21!} = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 303600$$

3. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из полос разной ширины, если имеются материи из 8 тканей?

Эта задача на размещение $A^3{}_8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$

Другой способ решения.
1цвет выбирается из 8 тканей 8 способами
2цвет выбирается 7 способами
3 цвет - 6способами
Используя правило умножения, получаем 8x7x6=**336 способов.**

4. На выборах победили 9 человек - Сафонов, Николаев, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

Здесь речь идет о размещениях $A^3{}_9 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 504$

5. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?

зная формулу размещения, получаем $A^4{}_{25} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 303600$

6. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13!\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{13!} = 14\cdot 15\cdot 16 = 3360$$.

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т.е. размещения отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

- число перестановок.

$$\mathbf{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

Примеры:

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что они должны состоять из различных цифр?

Решение: Имеем перестановки из 5 элементов.

$$P_n = 5! = 120$$

2. Сколькими способами можно собрать 6 разноцветных лоскутков в пеструю ленту?

Решение: Имеем перестановки из 6 элементов.

$$P_n = 6! = 720$$

3. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Используя понятие факториала, получаем: 6!=720

4. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Решение.

$P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

Сочетаниями без повторений из n элементов по k называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга только составом элементов.

-число сочетаний из n по k

Элементы каждого из n сочетаний можно расставить k способами.

При решении комбинаторных задач важно научиться различать виды соединений.

Чтобы отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний, определим, важен или нет порядок в следующих выборках:

а) судья хоккейного матча и его помощник;

б) три ноты в аккорде;

в) «Шесть человек останутся убирать класс!»

г) две серии для просмотра из многосерийного фильма.

Ответ: а) да; б) нет; в) нет; г) да.

Примеры:

Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать:

а) двух дежурных;

б) старосту и помощника старосты?

Решение: а). Порядок выбора двух дежурных не важен, поэтому рассмотрим сочетание $C_{24}^{2}=\frac{24!}{2!22!}=\frac{22!23\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 22!}=23\cdot 12=276;$

б). Порядок выбора старосты и помощника старосты важен, поэтому рассмотрим размещение $A_{24}^{2}=\frac{24!}{22!}=\frac{22!23\cdot 24}{22!}=23\cdot 24=552.$

Ответ: а) 276; б)552.

1. Если в полуфинале первенства по шахматам участвует 20 человек, а в финал выходят лишь трое, то сколькими способам и можно определить эту тройку?

Решение: В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существенен. Поэтому тройки, вышедшие в финал, являются сочетаниями из 20 по 3.

$$C_{20}^{3}=\frac{20!}{(20-3)!\cdot 3!}=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3}=1140$$

2. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов из десяти человек на конференцию?

Решение: В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существенен. Поэтому тройки делегатов являются сочетаниями из 10 по 3.

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$$

3. В 9 классе 15 предметов. Завучу школы нужно составить расписание на субботу, если в этот день 5 уроков. Сколько различных вариантов расписания можно составить, если все уроки различные?

Из 15 предметов 5 любых можно выбрать $C^5_{15} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5! x 10!} = 3003$

4. Из учащихся пяти 11 классов нужно выбрать двоих дежурных. Сколько пар дежурных можно составить (ученики в паре не должны быть из одного класса)?

Из пяти классов нужно выбрать 2 дежурных. Число элементарных событий = C^2_5 = 10

Ответ: 10 пар.

5. В 8 “а” классе лучше всех математику знают 5 учеников: Вася, Дима, Олег, Катя и Аня. На олимпиаду по математике нужно отправить пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки. Сколькими способами учительница может эту пару выбрать?

Мальчиков 3, из них 1 можно выбрать C_3^1, девочек 2, из них можно 1 выбрать C^1_2, используя правило умножения, получаем: C_3^1 x C^1_2 = 6

Ответ: 6 пар.

6. В 9 “б” классе 6 человек (Галя, Света, Катя, Оля, Максим, Витя) учатся на все пятерки. Департамент образования премировал лучших учащихся путевками в Анапу. Но, к сожалению, путевок всего четыре. Сколько возможно вариантов выбора учеников на отдых?

Из 6 человек нужно выбрать 4, число элементарных событий равно C^4_6 = 15

7. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

Вычислим, сколько четверок из 7 дисков можно составить у Пети: C^4_7=35, число четверок у Вали из 9 дисков -C^4_9 = 126

8. Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?

Из 5 офицеров выбрать 2 можно с помощью числа сочетаний C^2_5=10 способами, из 8 сержантов 4 - C^4_8=70, из 70 рядовых 15 -C^{15}_{70}. По правилу умножения находим число выбора отряда: 10x70xC^{15}_{70} = **700x**C^{15}_{70}

9. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

Из 6 изумрудов 3 он может выбрать $C^3{}_6$=20 способами, из 9 алмазов 5 - $C^5{}_9$=126, из 7 сапфиров 2 - $C^2{}_7$=21. По правилу умножения находим число вариантов 20x126x21=**52920**

10. В кабинете заведующего ювелирного магазина имеется код, состоящий из двух различных гласных букв русского алфавита, за которой следуют 3 различные цифры. Сколько вариантов придется перебрать мошеннику, чтобы раздобыть драгоценности, которые там хранятся?

В русском языке 9 гласных букв - а, е, е, и, о, у, э, ю, я. Выбрать из них 2 можно $C^2{}_9$=36 способами. Из 10 цифр выбрать 3 можно $C^3{}_{10}$=120 способами.

11. Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$$C_{15}^{10}=\frac{15!}{(15-10)!\cdot 10!}=\frac{15!}{5!10!}=\frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{5!\cdot 10!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{11\cdot 3\cdot 13\cdot 3\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 1\cdot 1}=$$

$$=\frac{11\cdot 3\cdot 13\cdot 14}{2}=11\cdot 3\cdot 13\cdot 7=3003.$$

12. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение. Солдат в дозор можно выбрать

$$C_{80}^{3}=\frac{80!}{77!3!}=\frac{77!\cdot 78\cdot 79\cdot 80}{77!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=\frac{78\cdot 79\cdot 80}{2\cdot 3}=13\cdot 79\cdot 80=82160$$

способами, а офицеров $C_3^1=3$ способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется $C_{80}^3\cdot C_3^1=82160\cdot 3=246480$ способов.

13. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4=\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=12650.$$

Контрольные вопросы:

1. Что такое комбинаторика?

2. Сформулируйте правило умножения.
3. Сформулируйте правило сложения.
4. Что называется n – факториалом?
5. Что называется размещениями из n элементов по m?
6. Запишите формулу для подсчёта числа размещений из n элементов по m без повторений (с повторениями).
7. Что называется перестановками из m элементов?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан.2 с. 69-10

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 13
Размещения, сочетания и перестановки.

Цели: сформировать систему знаний, связанных с понятиями размещений, перестановок и сочетаний.

Задание состоит из:

1. Ознакомиться с краткими теоретическими сведениями;
2. Выполнить задания.

Полезные ссылки:

1. **1.** Обучающее видео как создать доступ к файлу
2. **2.** Обучающее видео как создать Google Документ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основные правила комбинаторики:

1. Если некоторый объект А можно выбрать m способами, а объект В другими n способами, причем выборы объектов А и В несовместимы, то выбор «А или В» можно выполнить m + n способами.

Пример 3. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: по правилу суммы получаем 17+13=30 вариантов.

2. Если некоторый объект А можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от выбора объекта А) n способами, то пары объектов А и В можно выбрать m • n способами.

Пример 4. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Решение: имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно 12*3=36 вариантов переплета.

Так как комбинаторика – раздела математики, изучающего, в частности, вопрос о количестве комбинаций из *n* элементов по *m*, которые можно составлять тем или иным способом. Мы рассмотрим три таких способа.

1. Сочетания

Комбинации из *n* элементов по *m*, отличающиеся только составом, называются *сочетаниями*. Число сочетаний из *n* элементов по *m* равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (1)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot k \cdot n$ (см. видео «Факториал»).

Пример 1*: Найти 4!

Решение: 4!=1*2*3*4=24; Ответ: 4!=24

Пример 5. В группе 30 человек. Необходимо выбрать трех делегатов на конференцию. Сколько существует способов это сделать?

Решение: каждый способ – это новая тройка студентов, отобранная из 30 человек. Очевидно, эти тройки отличаются только по составу, то есть являются сочетаниями из 30 элементов по 3. Их количество находим по формуле (1):

$$C_{30}^{3}=\frac{30!}{3!\,27!}=\frac{28\cdot 29\cdot 30}{2\cdot 3}=28\cdot 29\cdot 5=4060\,\text{способов.}$$

2. Размещения

Комбинации из n элементов по m, отличающиеся составом или порядком элементов, называются *размещениями*. Число размещений из n элементов по m равно

$$A_{n}^{m}=\frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Пример 6. В группе 30 человек необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

Решение: каждый способ – это новая тройка студентов, отобранная из 30 человек. Очевидно, эти тройки отличаются как по составу, так и по порядку, то есть являются размещениями из 30 элементов по 3. Их количество находим по формуле (2):

$$A_{30}^{3}=\frac{30!}{27!}=28\cdot 29\cdot 30=24360\ \text{способов.}$$

Пример 7. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе 11 дисциплин.

Решение: каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающихся от других вариантов, как составом дисциплин, так и порядком их следования, то есть является размещением из 11 элементов по 5. Число вариантов расписания, то есть число размещений из 11 по 5 находим по формуле (2):

$$A_{11}^{5}=\frac{11!}{6!}=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11=55440\ \text{вариантов.}$$

3. Перестановки

Комбинации из n элементов по n, отличающиеся порядком, называются *перестановками*. Число перестановок из n элементов равно

$$P_{n}=n! \qquad (3)$$

Пример 8. Порядок выступления семи участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение: каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, то есть является перестановкой из 7 элементов. Их число находим по формуле (3):

$$P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040 \text{ вариантов}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Вместо фигуры нужно подставить число из своего варианта см. таблицу ниже!

Задание 1. В шахматном турнире участвует  человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Задание 2. Расписание одного дня состоит из  уроков. Определить число вариантов расписания при выборе  дисциплин.

Задание 3. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу  человек?

Задание 4. Вычислите $C_{12}^3 : A_{12}^3$.

Список:

№	Ф.И студента				
1		5	5	8	10
2		6	6	9	9
3		7	7	10	8
4		8	5	11	7
5		9	6	12	6
6		10	7	13	5
7		11	5	12	4
8		12	6	11	11
9		13	7	10	12
10		14	5	9	13
11		15	6	8	10
12		16	7	9	9
13		17	5	10	8
14		18	6	11	7
15		5	7	12	6
16		6	5	13	5
17		7	6	14	4

18		8	7	11	12
19		9	5	10	10
20		10	6	9	7
21		11	7	8	8
22		12	5	8	9
23		13	6	9	10
24		14	7	10	11

Контрольные вопросы:

1. Что называется n – факториалом?
2. Что называется размещениями из n элементов по m?
3. Запишите формулу для подсчёта числа размещений из n элементов по m без повторений (с повторениями).
4. Что называется перестановками из m элементов?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан.2 с. 69-10

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 14
Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Прикладные задачи.

Цель: формировать комбинаторный стиль мышления, философское восприятие случайного в окружающем мире, прививать чувство прекрасного в мире математики.

Методические рекомендации

Бином Ньютона

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m.$$

Задача 1 Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5 \cdot (-2) + C_6^2x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3x^3 \cdot (-2)^3 + C_6^4x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) + 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

1 вариант.

1. Вычислить: 1) P_7; 2) A_8^3; 3) C_8^5
2. Вычислить: 1) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$; 2) $\frac{8! - 6!}{5!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 предметов?
   2) В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?
   3) Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в 6 классных комнатах (по одной группе в комнате)?
4. Записать разложение Бинома: $(x-2)^4$

2 вариант.

1. Вычислить: 1) P_6; 2) A_8^5; 3) C_8^3
2. Вычислить: 1) $\frac{6! \cdot 4!}{8!}$; 2) $\frac{9! - 7!}{6!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 4 предмета из 8 предметов?

2) Имеются 3 билета на просмотр 3-х различных кинофильмов. Сколькими способами 8 друзей могут распределить между собой эти 3 билета?

3) Сколькими разными способами можно составить график очерёдности ухода в отпуск 8 сотрудников лаборатории?

4. Записать разложение Бинома: $(3x-2)^4$

Контрольные вопросы:

1. Что называется размещениями из n элементов по m?
2. Запишите формулу для подсчёта числа размещений из n элементов по m без повторений (с повторениями).
3. Что называется перестановками из m элементов?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан.2 с. 69-10

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 15

Решение комбинаторных задач.

Цели:
Образовательная**:** создать условия для развития у обучающихся умения формулировать проблемы, предлагать пути их решения, для формирования системы знаний, связанных с понятиями размещений, перестановок и сочетаний,
Воспитательная**:** содействовать умению общаться между собой; формировать умения делать обобщения на основе полученных данных в результате исследования,
Развивающая. выбирать правильные утверждения из нескольких данных.

План лекции

1. Сформулировать правило вычисления с помощью перестановок, размещения, сочетания.
2. Показать способы применения в повседневной жизни.

Задания для самостоятельного решения

1. В президиум избрали 3 человека. Каким числом способов они могут распределить обязанности председателя, секретаря и члена?
2. Сколько всех четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7?
3. Сколько существует двузначных чисел, имеющих обе чётные цифры?
4. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
5. Сколько существует шестизначных чисел, которые делятся на 5?
6. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что любая из цифр в написании числа встречается не более одного раза?
7. Любой телефонный номер состоит из пяти цифр. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 1, 2 и 3?
8. Сколькими способами можно расположить в ряд 2 зелёные и 4 красные лампочки?
9. Сколькими способами можно выбрать четыре монеты из 4-х пятикопеечных и 4-х десятикопеечных монет?
10. Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров в 2 вагона?
11. В кондитерской имеется 5 сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из 4-х пирожных?
12. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ***какао***, чтобы получились новые слова?

Ответы

1. 6 **2.** 256 **3.** 20 **4.** 900 **5.** 180000 **6.** 325 **7.** 243 **8.** 15 **9.** 5 **10.** 256 **11.** 70 **12.** 30

Контрольные вопросы:

1. Что такое комбинаторика?
2. Сформулируйте правило умножения.
3. Сформулируйте правило сложения.
4. Что называется n – факториалом?
5. Что называется размещениями из n элементов по m?
6. Запишите формулу для подсчёта числа размещений из n элементов по m без повторений (с повторениями).
7. Что называется перестановками из m элементов?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан.2 с. 69-10

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 16
Векторы. Действия с векторами.

Цель:
приобрести навыки выполнения действий над векторами;
научиться применять векторы и метод координат к решению геометрических задач.

1. **Краткие сведения из теории**

Понятие вектора. Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение и др.) характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины принято изображать направленными отрезками, которые называются векторами.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор.
В прямоугольной системе координат в пространстве любой вектор $\vec{a}$ можно разложить единственным образом по базисным векторам

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \ ,$$

коэффициенты a_x, a_y и a_z этого разложения называются **координатами** вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.

Абсолютная величина вектора $\vec{a}$ равна квадратному корню из суммы квадратов его координат: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами.

1. При сложении двух (или большего числа) векторов их соответственные координаты складываются:
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z) .$$
2. При вычитании векторов их соответственные координаты вычитаются:
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$$
3. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число:
$$k\vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z) .$$

4. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Скалярное произведение равно сумме попарных произведений соответствующих координат векторов:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Вычисление угла между векторами.

Из определения скалярного произведения векторов можно получить величину угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ или в координатах: $$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_2{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}} .$$

<u>Пример 1</u>: Даны два вектора $\vec{a}(1;-2;3)$ и $\vec{b}$ (1;3;0).

1. Найдите координаты векторов $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -3\vec{b}$;

Координаты векторов $3\vec{a}$ и $2\vec{b}$ находим по правилу умножения вектора на число: $3\vec{a}(3\cdot 1; 3\cdot(-2); 3\cdot 3) \Rightarrow 3\vec{a}(3;-6;9)$; $2\vec{b}(2;6;0)$.

Координаты вектора $\vec{c}$ находятся по правилу вычитания векторов: $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} \Rightarrow \vec{c}(3-2;-6-6;9-0) \Rightarrow \vec{c}(1;-12;9)$

Координаты вектора: $\vec{d} = -3\vec{b} \Rightarrow \vec{d}(-3;-9;0)$

2. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$;

По формуле скалярного произведения:

$$\vec{c}\vec{d} = 1(-3) + (-12)(-9) + 9\cdot 0 = -3 + 108 + 0 = 105.$$

3. Найдите длину векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

Длина вектора $\vec{b} = |\vec{b}| = \sqrt{1+9+0} \equiv \sqrt{10} \approx 3{,}162$;

Длина вектора $\vec{c} = |\vec{c}| = \sqrt{1+144+81} = \sqrt{226}$.

4. Определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{140}} = -\frac{\sqrt{35}}{14}$$

$$\varphi = arccos\left(-\frac{\sqrt{35}}{14}\right) \approx 115^\circ$$

.

2*. Выполните задания* в соответствии с номером варианта:

Даны координаты вершин треугольника ABC. 1. Вычислите $\angle C$ в ΔABC. 2. Определите вид ΔABC. 3. Найдите координаты вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$.	
№ варианта	Координаты вершин треугольника ABC
1.	A (4; 6; 3), B (-5; 2; 6), C (4;-4; -3).
2.	A (4; 3; -2), B (-3; -1; 4), C (2; 2; 1).
3.	A (-2; -2; 4), B (1; 3; -2), C (1; 4; 2).
4.	A (2; 4; 3), B (3; 1; -4), C (-1; 2; 2).
5.	A (2; 4; 5), B (1; -2; 3), C (-1; -2; 4).
6.	A (-1; -2; 4), B (-1; 3; 5), C (1; 4; 2).
7.	A (1; 3; 2), B (-2; 4; -1), C (1; 3; -2).
8.	A (2; -4; 3), B (-3; -2; 4), C (0; 0; -2).

3. *Решение типовых примеров:*

Даны вершины ΔABC: A (-2; 5; 2), B (2; 3; -1), C (6; 4; -3).

1) Найти $\angle ABC$.

$\angle ABC$ - это угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BA} = (A_x - B_x; A_y - B_y; A_z - B_z)$

$\overrightarrow{BA}$ = (-2-2; 5-3; 2-(-1)) = (-4; 2; 3)

Аналогично находим координаты вектора $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BC}$ = (6-2; 4-3; -3-(-1)) = (4; 1; -2)

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -16 + 2 - 6 = -20$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$$\cos \angle ABC = \frac{-20}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{21}} = \frac{-20}{\sqrt{609}} \approx -0{,}81$$

$$\angle ABC = \arccos(-0{,}81) = \pi - \arccos 0{,}81 = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

Ответ: $\angle ABC = \dfrac{4\pi}{5}$.

2) Определить вид ΔABC.

Чтобы определить вид треугольника нужно найти длины его сторон и проверить по теореме Пифагора является ли он прямоугольным.

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{29}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{21}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{64+1+25} = \sqrt{90}$

По т. Пифагора: $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2$

$\left(\sqrt{90}\right)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

90 $\neq$ 29+21

Следовательно, ΔABC - косоугольный, разносторонний.

3) Вычислить координаты вектора $\vec{b} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{AC}$ = 2 (8; -1; -5) = (16; -2; -10)

$-4\overrightarrow{BA}$ = -4 (-4; 2; 3) = (16; -8; -12)

$3\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{BC}$ = -3 (4; 1; -2) = (-12; -3; 6)

$$\begin{array}{r} 2\overrightarrow{AC} = (16; -2; -10) \\ -4\overrightarrow{BA} = (16; -8; -12) \\ \underline{3\overrightarrow{CB} = (-12; -3; 6)} \\ 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB} = (20; -13; -16) \end{array}$$

Ответ: $\vec{b}$ (20;-13;-16)

Контрольные вопросы:

1. Что вектор?
2. Действия над векторами, заданными своими координатами.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан 44-45

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 17
Действия с векторами, заданными координатами.

Цель работы:

студент должен:

знать:

- правила сложения векторов;

уметь:

- строить сумму векторов по правилу треугольника, параллелограмма;

- вычислять координаты суммы векторов.

Сведения из теории:

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).

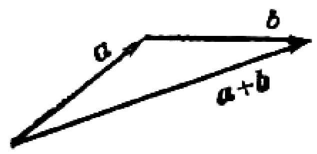


Рисунок 81. Правило треугольника

Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) *правилом параллелограмма*: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

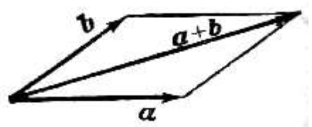


Рисунок 82. Правило параллелограмма

Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника, построим сумму четырех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

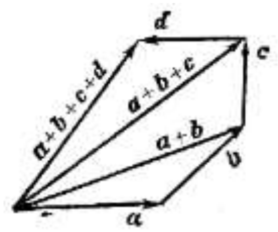


Рисунок 83. Правило многоугольника

Разность двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их есть вектор, идущий из конца $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Два вектора равной длины, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны, называются *взаимно обратными*: если один из них обозначен символом $\vec{a}$, то другой обозначается символом $-\vec{a}$. Легко видеть, что $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Т. о., построение разности равносильно прибавлению к «уменьшаемому» вектора, обратного «вычитаемого».

Три вектора в пространстве можно складывать по *правилу параллелепипеда*: если на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, как на ребрах, построить параллелепипед, то его диагональ, выходящая из общего начала данных векторов, и будет их суммой $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:

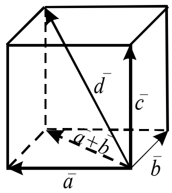


Рисунок 84. Правило параллелепипеда

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$, 2) $\vec{a}-\vec{b}$, 3) $-\vec{a}+\vec{b}$, 4) $-\vec{a}-\vec{b}$.

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, при вычитании вычитаются соответствующие координаты, т.е. если даны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, то координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ вычисляются по формулам:

$$\vec{c}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2),$$
$$\vec{d}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2).$$

Пример 1.

Вычислить координаты векторов $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=(-3; 5; 1)$, $\vec{b}=(4; -2; 8)$.

Решение:

по формулам

$$\vec{c}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2),$$
$$\vec{d}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2),$$

имеем

$$\vec{c}=(-3+4;\ 5+(-2);\ 1+8)=(1;\ 3;\ 9),$$
$$\vec{d}=(-3-4;\ 5-(-2);\ 1-8)=(-7;\ 7;\ -7).$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{h}$; $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{h}$, если $\vec{a}$ =(4; -3; 10), $\vec{b}$ =(-4; 12; -1), $\vec{h}$ =(3; -7; -11).

Контрольные вопросы:

1. Что вектор?
2. Действия над векторами, заданными своими координатами.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан 44-45

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 18
Скалярное произведение векторов.

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления скалярного произведения векторов;

уметь:

- вычислять скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Сведения из теории:

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\overrightarrow{ab}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через φ, то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi .$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить также формулой:

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}$$

или

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a} .$$

Из формулы $\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ следует, что $\overrightarrow{ab} > 0$, если φ – острый угол, $\overrightarrow{ab} < 0$, если φ – тупой угол; $\overrightarrow{ab} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 .$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 .$$

Угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается формулой $\cos\phi = \dfrac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, или в координатах $\cos\phi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Проекция произвольного вектора $S=(x, y, z)$ на какую-нибудь ось u определяется формулой:

$$np_u\vec{S} = \vec{S}\vec{e},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный по оси u.

Если даны α, β, γ, которые оси u составляют соответствующие углы с координатными осями, то $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и для вычисления вектора $\vec{S}$ может служить формула:

$$np_u\vec{S} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Пример 1.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

$\overrightarrow{ab}$, $|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$, $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

Решение:

из формулы $\cos\phi = \dfrac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, выразим $\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, тогда

$\overrightarrow{ab} = 12\cos\dfrac{2\pi}{3} = 12\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$;

т.к. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $|\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$;

по формуле сокращенного умножения квадрата суммы, имеем

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2(-6) + 16 = 13;$$

аналогично

$$(3\vec{a}+2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 81 + 12(-6) + 64 = 73;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата разности, имеем

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 2(-6) + 16 = 37;$$

раскроем скобки

$$(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 27 + 4(-6) - 64 = -61.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить:

$(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$, $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

2) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3) Даны векторы $\vec{a} = (4;-2;4)$ и $\vec{b} = (6;-3;2)$. Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $\sqrt{\vec{a}^2}$, $\sqrt{\vec{b}^2}$, $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

4) Даны точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Вычислить: $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$, $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$.

Контрольные вопросы:

1. Что вектор?
2. Действия над векторами, заданными своими координатами?
3. Скалярное произведение?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4, зан 51

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала,

руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 19
Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.

Цель:

- научиться использовать формулы перехода от градусов к радианам и обратно.

Ход работы:

1. **Прочитайте теоретическую часть, сделайте конспект.**

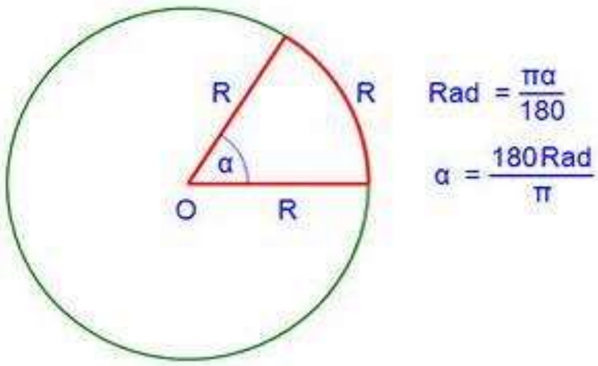
Как известно, углы измеряются в градусах, минутах, секундах. Эти единицы измерения связаны между собой соотношениями:

$1^\circ = 60'$ $\qquad$ $1' = 60''$

$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ $\qquad$ $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$

Кроме указанных выше, используется также единица измерения углов, называемая ***радианом.***

Углом в один радиан называют центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности. Угол, равный 1 радиан изображен на рисунке.



Радианная мера угла, т.е. величина угла, выраженная в радианах, не зависит от длины радиуса. Это следует из того, что секторы круга разного радиуса, ограниченные равными углами, подобны между собой.

Установим связь между радианными и градусными измерениями углов.

Углу, равному 180^0, соответствует полуокружность

$\boxed{l = \pi R}$, т.е. дуга, длина l которой равна πR

Чтобы найти радианную меру угла, надо длину дуги l разделить на длину радиуса **R**.

Следовательно, радианная мера угла в $\boxed{\mathbf{180^0 = \pi}\ \textit{рад.}}$

Отсюда получаем, что радианная мера угла в 1^0 равна $\frac{\pi}{180}$ радиан:

$$1 \text{ градус} \leftrightarrow \frac{\pi}{180} \text{ радиан,}$$

:

Приближенно 1^0 равен 0,017 рад.

Из равенства $\boxed{\mathbf{180^0 = \pi\ \textit{рад}}}$ также следует, что градусная мера угла в 1 радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi}$

$$1 \text{ радиан} \leftrightarrow \frac{180}{\pi} \text{ градусов,}$$

Приближенно 1 радиан равен 57^0.

Таким образом можно записать две формулы для перевода одних единиц измерения в другие:

$$\boxed{\alpha^0 = \alpha_{\text{рад}} \frac{180^0}{\pi}} \qquad \boxed{\alpha_{\textit{рад}} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^\circ}$$

2. **Рассмотрите примеры перехода от радианной меры к градусной и от градусной меры к радианной, запишите их в тетради.**

Пример 1. Выразите в градусах 4,5 рад.

Решение

Мы знаем, что 1 $\textit{рад}= \frac{180^\circ}{\pi}$,

следовательно 4,5 $\textit{рад}$= $4{,}5\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{4{,}5\cdot180^\circ}{\pi} = \frac{810^\circ}{3{,}14} \approx 257{,}961783\ldots{}^0 \approx 258^0$.

Пример 2. Найдите радианную меру угла в 72^0.

Решение

Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад, то $72^0=72\cdot\frac{\pi}{180}\textit{рад}=\frac{72\cdot\pi}{180}\textit{рад}=\frac{2\cdot\pi}{5} = \frac{2\cdot3{,}14}{5}\textit{рад}\approx1{,}3\ \textit{рад}$

Замечание. При записи радианной меры угла обозначение *рад* часто опускают.

3. Выполните в тетради задания:

№1. Выразите в радианной мере углы 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 270^0, 360^0.

№2. Заполните таблицу:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α								
cos α								
tg α								
ctg α								

№3. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

0,5 *10* $\frac{\pi}{5}$ $-\frac{9\pi}{2}$ $\frac{\pi}{9}$ $-\frac{5\pi}{6}$ $\frac{3\pi}{4}$ 12π.

№4. Найдите радианную меру угла, равного:

135^0, 36^0, 120^0, 150^0, -210^0, 300^0, -1240^0, 1225^0.

№5. Вычислите:

1. $2\sin\frac{\pi}{3}+tg\frac{\pi}{4}$;
2. $cos\frac{\pi}{2}-sin\frac{3\pi}{2}$;
3. $2\sin\pi-2\cos\frac{3\pi}{2}+3tg\frac{\pi}{4}-ctg\frac{\pi}{2}$;
4. $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3cos\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{6}+ctg\frac{\pi}{3}$;
5. $sin^2\frac{\pi}{4}+sin^2\frac{\pi}{3}$;
6. $tg^2\frac{\pi}{4}\cdot sin\frac{\pi}{3}\cdot tg^2\frac{\pi}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Понятия радиан?
2. Переход от радианной меры к градусной и от градусной меры к радианной?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 1

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 20
Основные тригонометрические тождества

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Основные тригонометрические тождества».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

При выполнении заданий по данной теме нужно помнить:

Основные тригонометрические тождества	Четность, нечетность тригонометрических функций
1) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ 2) $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ 3) $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ 4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ 5) $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$ 6) $\frac{1}{sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$	$sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$ $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$ $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$ $ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

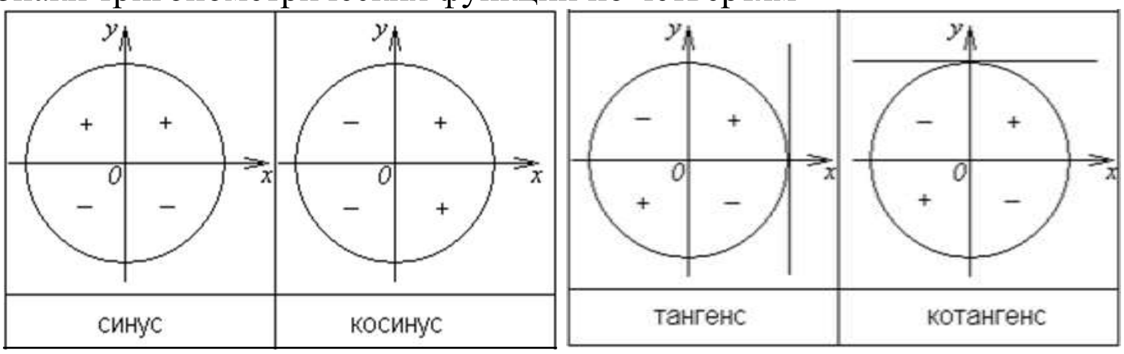


Таблица значений тригонометрических функций, некоторых углов.

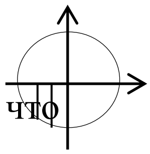
Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$ctg\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

Рассмотрим примеры выполнения заданий.

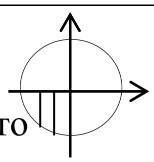
1. Упростите	Применяемые правила
$(sin\,\alpha + cos\,\alpha)^2 + (sin\,\alpha - cos\,\alpha)^2 =$ $= sin^2\alpha + 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha + cos^2\alpha +$ $+sin^2\alpha - 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha + cos^2\alpha =$ $= 2sin^2\alpha + 2cos^2\alpha = 2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) =$ $= 2 \cdot 1 = 2$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

b) Найти неизвестные из тригонометрических функций:

$sin\,\alpha, cos\alpha, tg\,\alpha, ctg\,\alpha$, если $sin\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Дано:	Решение:
$sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ Найти: $cos\alpha$, $tg\,\alpha, ctg\,\alpha$.	Из формулы : $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, выразим $cos\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $cos\alpha < 0$, =>  $cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha}$, $cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$, Формуле (2): $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ $tg\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$, Т.к. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ответ: $cos\alpha = -\frac{1}{2}, tg\alpha = \sqrt{3}, ctg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.Дано $tg\alpha = \frac{1}{2}$. Какое значение имеют остальные тригонометрические функции этого угла. В ответе дроби не сокращайте.

Дано:	Решение:
$tg\alpha = \frac{1}{2};$ $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	Из формулы : $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$, выразим $cos\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $cos\alpha < 0$, => 

Найти: $\sin\alpha, \cos\alpha$, $ctg\,\alpha$.	$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1, <=> \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{5}{4}$, решим пропорцию $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}, => \cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ По формуле (1): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, выразим $\sin\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $\sin\alpha < 0, =>$ $\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{4}{5}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ Т.к. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, $ctg\alpha = 2$ Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, ctg\alpha = 2$.

3. Доказательство тригонометрических тождеств

При доказательстве любых тождеств, и в частности тригонометрических, обычно используют следующие способы:

1) выражение, стоящее и одной части равенства, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части равенства;

2) выражения, стоящие в левой и правой частях тождества, с помощью тождественных преобразований приводят к одному и тому же виду;

3) доказывают, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю.

Рассмотрим пример:

Доказать тождество: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Используя формулу для разности квадратов двух чисел, получаем:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Но $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Поэтому

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha,$$ что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельной подготовки к практическому занятию:

Задание 1

a) Упростите выражение;

b) Найти неизвестные из тригонометрических функций: $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\,\alpha, ctg\,\alpha$

1 вариант	$a) 1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ $b)$ Если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}, 0 < \alpha < 90°$
2 вариант	$a) \frac{1-\sin^2\alpha}{ctg\,\alpha}$ $b)$ Если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 < \alpha < 90°$

Задание 2

Дан тангенс (котангенс) угла. Какое значение имеют остальные тригонометрические функции этого угла. В ответе дроби не сокращайте.

1 вариант	$tg\alpha = \frac{20}{21}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
2 вариант	$ctg\alpha = -\frac{6}{8}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Задание 3

Докажите, что равенство, является тождеством

1 вариант	$sin^4\alpha + cos^4\alpha - 1 == -2sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$
2 вариант	$\frac{1 - sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\alpha}{1 + sin\alpha}$

Контрольные вопросы:

1. Значения тригонометрических функций основных углов.
2. Знаки тригонометрических функций по четвертям.
3. Свойства тригонометрических функций.
4. Перечислите свойства, основные тригонометрические тождества.
5. Формулы сокращенного умножения.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 1

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 21
Формулы сложения, удвоения.

Цель работы::

знать:

- формулы двойного угла тригонометрических функций;
- формулы половинного аргумента тригонометрических функций;

уметь:

- выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя формулы двойного угла.
-

Сведения из теории:

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$

$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}.$$

Подставляя в формулы $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ и $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ значение $t = \frac{\alpha}{2}$, получаем формулы *половинного аргумента*:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$ на $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$ получаем формулу

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Пример 25.

Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла, $\sin 42^0$.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем

$$\sin 42^0 = \sin(2\cdot 21^0) = 2\sin 21^0\cos 21^0.$$

Пример 26.

Вычислите $2\sin 15^0\cos 15^0$.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем

$$2\sin 15^0\cos 15^0=\sin(2\cdot 15^0)=\sin 30^0=0{,}5.$$

Пример 27.

Вычислите $\sin(\pi/12)$.

Решение:

по формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, имеем

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}068.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\sin 54^0$. 2) Вычислите: $\frac{1-tg^2 75^0}{2tg75^0}$.	**2 вариант** 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$. 2) Вычислите: $\frac{2tg22^0 30'}{1-tg^2 22^0 30'}$.	**3 вариант** 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\cos 16^0$. 2) Вычислите: $\frac{2tg15^0}{1-tg^2 15^0}$.
4 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\mathrm{ctg}\frac{5}{2}\pi$. 2) Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{24}{25}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	**5 вариант** 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\sin\frac{7}{12}\pi$. 2) Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.	**6 вариант** 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\mathrm{tg}68^0$. 2) Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
7 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\cos\frac{5}{4}\pi$. 2) Вычислите $tg\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и	**8 вариант** 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: ctg 102^0. 2) Вычислите $tg\frac{\alpha}{2}$, если $cos\alpha=-\frac{1}{2}$ и	**9 вариант** 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: tg 162^0. 2) Вычислите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы двойного угла тригонометрических функций.
2. Запишите формулы половинного аргумента тригонометрических функций.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 1

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 22

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Цель: сформировать умение применять формулы к решению задач по изучаемой теме.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделать краткие записи в тетради
2. Изучить условие заданий для практической работы. Оформить отчет по работе

Краткие теоретические сведения.

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

6) $ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента

1) $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 3) $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

2) $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 4) $ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

Формулы половинного аргумента

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Примеры решения задач

Пример 1. Упростить: $\sin40^0 - \sin20^0$

Решение: $\sin40^0 - \sin20^0 = 2\cos\frac{40^0+20^0}{2}\cdot\sin\frac{40^0-20^0}{2} = 2\cos30^0\cdot\sin10^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin10^0 = \sqrt{3}\sin10^0$.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
№1. Преобразуйте в произведение:		
А) $Cos50^0 + Cos20^0$; Б) $Sin2\alpha - Sin10\alpha$.	А) $Sin12^0 + Sin20^0$; Б) $Cos6\alpha - Cos3\alpha$.	А) $Sin40^0 + Sin16^0$; Б) $Cos15\alpha + Cos45\alpha$.
№2 Найти *Sinα, Cosα* и *tgα*, если известно, что		
$tg\frac{\alpha}{2}=5$.	$tg\frac{\alpha}{2}=2$.	$tg\frac{\alpha}{2}=3$.

№3. Найдите $\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, если		
$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{1}{3}, 2\pi < \alpha < 3\pi.$	$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{1}{4}, -\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}.$	$\mathrm{Cos}\,\alpha = -\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Контрольные вопросы

1.Определение числовой единичной окружности.
2.Определение синуса, косинуса числа.
3.Основные тригонометрические тождества.
4. Формулы сложения.
5. Формулы удвоения.
6. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.
7. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 1

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.
2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 23
Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Цель: закрепить умения и навыки преобразования тригонометрических выражений, используя формулы тригонометрии.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал.

Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Из формул сложения, полагая $\beta=\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ tg\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ ctg\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:
2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$
$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Пример 1.

Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x \sin 3x$.

Решение:

по формуле $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$ имеем

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x.$$

Пример 2.

Вычислите: $\sin 40^0 + \sin 20^0$.

Решение: по формуле $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^0 + \sin 20^0 = 2\sin\frac{40^0 + 20^0}{2}\cos\frac{40^0 - 20^0}{2} = 2\sin 30^0 \cos 10^0 = 2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}98 \approx 0{,}98.$$

Пример 3.

Докажите тождество:

а) $1 + ctg^2 a + \dfrac{1}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$

Решение:

$1 + ctg^2 a + \dfrac{1}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$ *(используем формулу:* $1 + ctg^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$*)*

$$\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$$

$\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\sin^2 a \cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$ *(используем формулу:* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$*)*

$$\frac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a\sin^2 a}$$
$$\frac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}=\frac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}$$

Левая часть равенства = Правой части *Ответ: тождество верно*

Задания для самостоятельного решения:

1.Упростить выражение:

а) $\cos^2\alpha\,(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$; б) $0{,}5\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha-1$; в) $\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\cos\alpha$; г) $\frac{\sin80+\sin20}{\cos20-\cos80}$;

д) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,\mathrm{tg}(\pi-\alpha)$; е) $\sin63^0\cos27^0+\sin27^0\cos63^0$; ж) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\beta$

2.Докажите тождество:

а) $\frac{\sin2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1}=2\sin\alpha$; б) $\frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$; в) $(\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha):\cos2\alpha=\frac{2}{\sin^2\alpha}$; г) $1-\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}$

3. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos2\alpha$ если $\sin\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta=\frac{12}{15}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

Контрольные вопросы:

1. Формулы сложения.
2. Формулы удвоения.
3. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.
4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 1

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 24
Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления обратных тригонометрических функций.

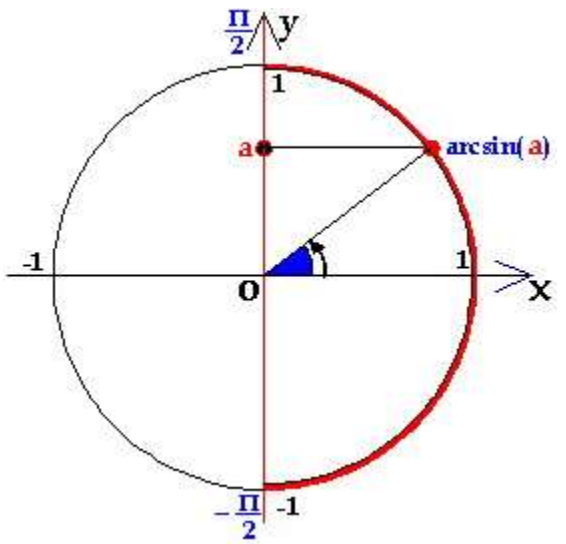
Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Обратные тригонометрические функции:



Определение: Арксинусом числа **a** называется угол из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу **a**.

Свойство арксинуса от отрицательного угла :$arcsin(-a) = -arcsin(a)$

Аналогично дается определение арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.

Определение: Аркосинусом числа **а** называется угол из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен числу **а**.

Свойство арккосинуса от отрицательного угла :$arccos(-a) = \pi - arccos(a)$

Определение: Арктангенсом числа **а** называется угол из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу **а**.

Свойство арктангенса от отрицательного угла :$arctg(-a) = -arctg(a)$

Определение: Арккотангенсом числа **а** называется угол из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен числу **а**.

Свойство арккотангенса от отрицательного угла :$arcctg(-a) = \pi - arcctg(a)$
Дополнительные свойства обратных тригонометричесиких функций:

$Sin(arcsin(a)) = a$, если $|a| \leqslant 1$;

$Cos(arccos(a)) = a$, если $|a| \leqslant 1$;

$tg(arctg(a)) = a$, если $a \in R$;

$ctg(arcctg(a)) = a$, если $a \in R$;

$arcsin(sinx) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$arccos(cosx) = x$, если $x \in [0;\pi]$;

$arctg(tg) = x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

$arcctg(ctgx) = x$, если $x \in (0;\pi)$

Примеры вычислений

- 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ u $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- 2) $\arcsin 0 = 0$, так как $\sin 0 = 0$ u $0\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)= -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$ так как

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример : Сравните $\arcsin\frac{1}{2}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Решение: т.к. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$, а значит $\arcsin\frac{1}{2}<\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Задание для самостоятельной работы:

1.Вычислите: а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; г) $\operatorname{arcctg} 1$; д) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $\arccos(-2)$;

2.Сравните числа: а) $\arcsin\frac{1}{2}$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg} 1$;

в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3. Вычислите значение выражения: а) $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $2\operatorname{arctg} 1+3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

г) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)-2\arcsin 1$; д) $\frac{12}{\pi}\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\pi}{12}\right)$; е) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}+\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$.

Контрольные вопросы:

1. Понятия обратных тригонометрических функций?
2. Свойства обратных тригонометрических функций?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 525

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.
2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 25
Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления тригонометрических функций.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

1. Решите уравнение $\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ 2) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ 3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2. Решите уравнение *cos2x = 0.*

1) $\tilde{o} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$; *2)* $\tilde{o} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; *3)* $\tilde{o} = \frac{\pi}{2} n, n \in Z$; *4)* $\tilde{o} = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

3. Решите уравнение $ctg^2 x = 3.$

1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$ 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z;$ 3) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$ 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$

4. Решите уравнение $-3sinx = 0.$

1) $\pi m, m\in Z;$ 2) $2\pi m, m\in Z;$ 3) $\frac{\pi m}{-3}, m\in Z;$ 4) $\frac{2\pi m}{-3}, m\in Z.$

5. Решите уравнение $tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$ 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 3) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 4) $\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

6. Решите уравнение $cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=0$.

1) $x=\pi+\pi k, k\in Z;$ 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;$ 3) $x=2\pi k, k\in Z;$ 4) $x=\pi+2\pi k, k\in Z.$

7. Решите уравнение $ctg\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

1) $x=\pi+2\pi k, k\in Z;$ 2) $x=-\pi k, k\in Z;$ 3) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;$ 4) $x=2\pi k, k\in Z.$

8. Решите уравнение $sinx - sin^2 x = cos^2x.$

1) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$ 2) $x=2\pi k, k\in Z;$ 3) $x=\pi k, k\in Z;$ 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$

9. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\cos(-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) 0 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{3\pi}{4}$

10. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\sin(-x)=\frac{1}{2}$.

1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{5\pi}{6}$

11.Решите уравнение $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ 2) $2\pi k, k\in Z$ 3) $\pi k, k\in Z$ 4) $\pi+2\pi k, k\in Z$

12. Решите уравнение $2\cos\frac{x}{2}=1.$

1) $(-1)^n \cdot \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ 4) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$

13.Решите уравнение $sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

1) x= π+2πk, k∈ Z;   2) x=$\frac{\pi}{2}$+πk, k∈ Z;   3) x=πk, k∈ Z;   4) x=$\frac{3\pi}{4}$+πk, k∈ Z.

14. Решите уравнение *sinx* - $\frac{\sqrt{3}}{3}$*cosx = 0.*

1) $\frac{\pi}{6}$+πk, k∈ Z;   2) ±$\frac{\pi}{6}$+2πk, k∈ Z;   3) $\frac{\pi}{3}$+πk, k∈ Z;   4) -$\frac{\pi}{6}$+πk, k∈ Z.

15. Решите уравнение $ctg\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) = 1$.

1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;   2) $\frac{1}{2} + 2k, k \in Z$;   3) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;   4) $\frac{1}{2} + k, k \in Z$.

16. Решите уравнение $cos^2 x - sin^2 x = -\frac{1}{2}$.

1) $\pm\frac{5\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;   2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;   3) $\pm\frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;   4) $\pm\frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

17. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2\sin 5x} + 1 = 0$.

1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z$ 2) $(-1)^n\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z$ 4) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

18. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3x} + 1 = 0$.

1) $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ 2) $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ 3) $(-1)^{n+1}\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$ 4) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

19. Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos\frac{x}{7}-3=0$.

1) $(-1)^n\frac{7\pi}{6}+7\pi n, n\in Z$ 2) $\pm\frac{7\pi}{6}+14\pi n, n\in Z$

3) $(-1)^n\frac{7\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

20. Решите уравнение $2\sin 5x-\sqrt{2}=0$.

1) $(-1)^n\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{20}+2\pi n, n\in Z$

3) $(-1)^n\frac{\pi}{20}+\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}, n\in Z$

21. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 5\pi x-1,5=0$.

1) $(-1)^n\frac{1}{15}+\frac{n}{5}, n\in Z$ 2) $(-1)^n\frac{5}{3}+5n, n\in Z$ 3) $\pm\frac{1}{15}+\frac{n}{5}, n\in Z$ 4) $\pm\frac{1}{15}+\frac{2n}{5}, n\in Z$

22. Решите уравнение $\sqrt{2}\cos 4\pi x+1=0$.

1) $(-1)^{n+1}\frac{1}{16}+\frac{n}{4}, n\in Z$ 2) $(-1)^{n+1}\frac{1}{16}+\frac{n}{2}, n\in Z$ 3) $\pm\frac{3}{16}+\frac{n}{2}, n\in Z$ 4) $\pm\frac{3}{4}+2n, n\in Z$

23. Решите уравнение $\left(2\sin\frac{x}{3}-1\right)(\cos 3x-2)=0$.

1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+3\pi n, n\in Z$

3) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 4) $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

24. Решите уравнение $\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)(\sin 5x+2)=0$.

1) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi n, n\in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

Ответы:

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	3	1	1	1	3	4	2	1	2	1	3	4	2	1	2	1

№ вопроса	17	18	19	20	21	22	23	24
Ответ	1	2	2	1	1	3	2	2

Контрольные вопросы:

1. Понятия тригонометрических уравнений?
2. Алгоритм решения тригонометрических уравнений?
3. Алгоритм решения тригонометрических неравенств?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 525

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 26

Контрольная работа по теме “Основы тригонометрии”

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления тригонометрических функций.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по темам тригонометрии.

2. Решите контрольную работу. Оформите решение письменно в тетради.

1 вариант

1. Вычислите: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\operatorname{arctg}(-1)$

2. Вычислите: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\operatorname{arcctg}(\sqrt{3})$

3. Решите уравнение: $\sin x - \frac{1}{2} = 0$

4. Решите уравнение: $\cos 2x = 1$

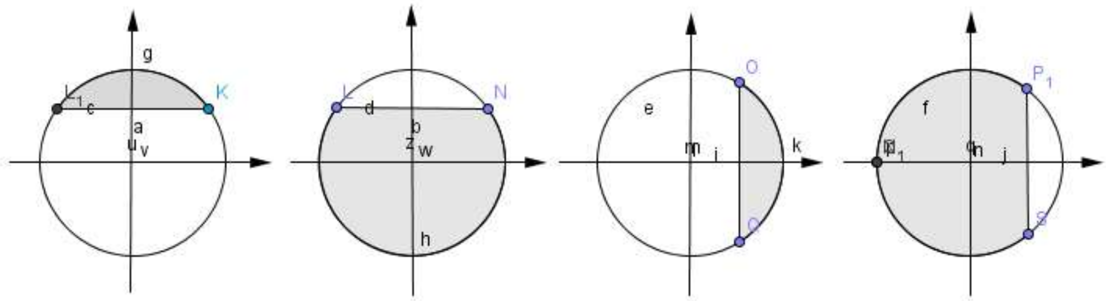
15. Укажите уравнение, которому соответствует решение:

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; **2)** $\cos x = 0$; **3)** $\sin x = -1$; **4)** $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. На каком из рисунков показано решение неравенства: $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$?

1) **2)** **3)** **4)**



7. Решите уравнение: $6\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

8. Решите уравнение: $\left(2\sin\frac{x}{3} - 1\right)(\cos 3x - 2) = 0$.

9. Представив 105^0 как $60^0 + 45^0$, вычислите $\sin 105^0$.

10. Упростите:

$tgt \cdot \cos(-t) + \sin(\pi + t)$

2 вариант

1. Вычислите: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0{,}5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

2. Вычислите: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3. Решите уравнение: $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

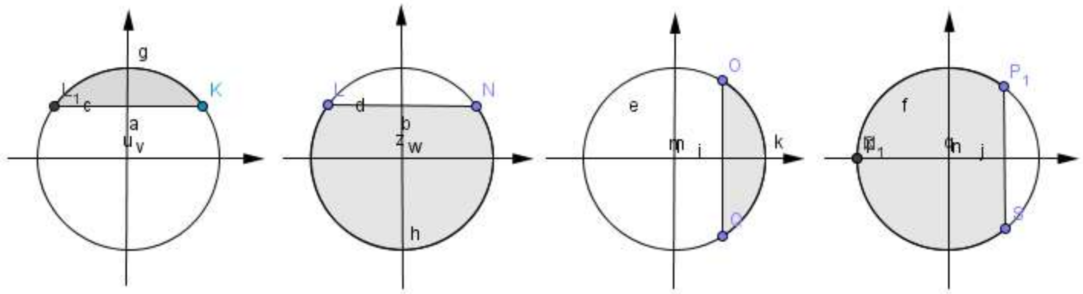
4. Решите уравнение: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

5. Укажите уравнение, которому соответствует решение: $x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$:

1) ctg x = -1; **2)** cos x = 0; **3)** cos x = -1; **4)** tg x = 1.

6. На каком из рисунков показано решение неравенства: $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$?

1) **2)** **3)** **4)**



7. Решите уравнение: $\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\sin 5x + 2\right) = 0$.

8. Решите уравнение: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

9. Представив 15^0 как $45^0 - 30^0$, вычислите $\cos 15^0$.

1**0**. Упростите:

$$ctgt \cdot \sin(-t) + \cos(2\pi - t)$$

Контрольные вопросы:

1. Понятия обратных тригонометрических функций?
2. Свойства обратных тригонометрических функций?
3. Понятие тригонометрии?
4. Тригонометрические уравнения, неравенства?
5. Основные тригонометрические тождества?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 525

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 27
Построение и чтение графиков функций.

Цель: отработать на примерах знания, умения и навыки по теме: «Свойства функций». Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал.1° ***Понятие функции.*** Пусть X и $У$– два множества действительных чисел. Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция,* область значения которой расположена в $У$. Это можно записать так: $f : X \to Y$.

Множество X- называют *областью определения функции*, а множество $У$, состоящее из всех чисел вида $y = f(x)$–*множеством значений* функции.

Если y является функцией от x, то пишут $y = f(x)$. Область определения обозначается через $D(f)$, а множество значений – через $E(f)$.

Схема исследования функции:

*1. Область определения и область значения функции.(*Область определения функции - множество допустимых значений переменной х. Область значения функции - множество допустимых значений переменной у.)

2.Чётность, периодичность функции.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат (Оу).

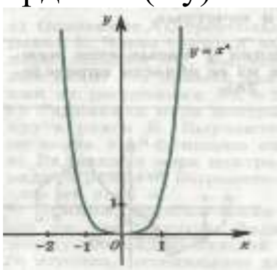
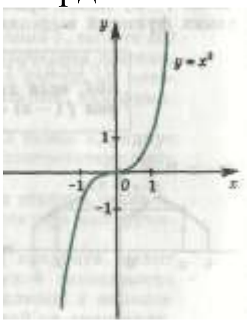


График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



3.Точки пересечения с осями координат.

*4.Промежутки знакопостоянства функции.(*Промежутки знакопостоянства – промежутки в которых функция принимает положительные и отрицательные значения.)

5.Промежутки возрастания и убывания функции.

*6.Точки экстремума.(*точки максимума и минимума функции).

7.Наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{x}$.

Решение. Данная функция определена, если $4 - x^2 \geq 0$ и $x \neq 0$. Решаем эту систему:

$$\begin{cases} (2 - x)(2 + x) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

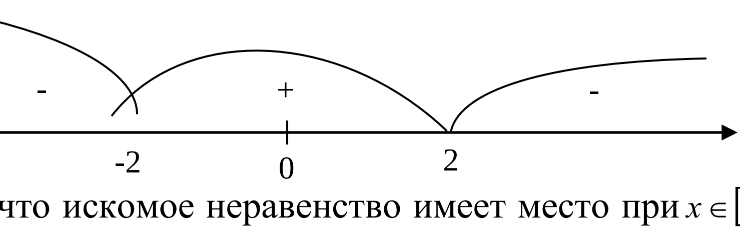


Рис. 1.

Ясно, что искомое неравенство имеет место при $x \in [-2;0) \cup (0;2]$, значит, полученное множество есть область определения данной функции.

Пример 2. Установить чётность или нечётность функции $f(x) = x^3 \sin 5x$.

Решение. Для данной функции область определения симметрична относительно нуля: $D(f) =]-\infty;+\infty[$.

Заменяя x на $-x$, получим $f(-x) = (-x)^3 \sin 5(-x) = x^3 \sin 5 = f(x)$, т.е. $f(-x) = f(x)$. Итак, данная функция чётная.

Пример 3. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \log_6(x-2)$ на отрезке $[3;8]$.

Решение. Подставим в функцию концы отрезка и посчитаем в них значение функции: f(3)=$\log_6(3-2)$ =$\log_6 1$=0

f(8)=$\log_6(8-2)$ =$\log_6 6$=1

Ответ: Наибольшее значение функции f(8) =1

Пример 4. Построить и прочитать график квадратичной функции у = $2(x+0,75)^2$ -6,125

$2x^2 + 3x - 5$.

Решение. 1. Раскроем скобки и преобразуем функцию к виду у = $2x^2 + 3x - 5$.

Так как а = 2> 0 ,ветви параболы направлены вверх.

2. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + 3x - 5$; D=3^2-4*2*(-5)=49> 0

Дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, поэтому парабола имеет две точки пересечения с осью ОХ.

Для того, чтобы найти их координаты, решим уравнение $2x^2 + 3x - 5 = 0$

x_1= -2.5 и x_2= 1

3. Координаты вершины параболы (m;n) .В нашем случае (-0,75; -6,125)

4. Точка пересечения параболы с осью OY: (0;-5),и ей симметричная относительно оси симметрии параболы.

Нанесем эти точки на координатную плоскость, и соединим их плавной кривой:

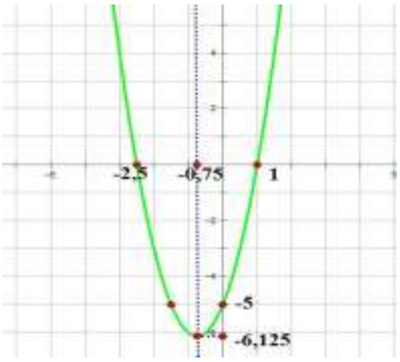


Рис. 2

Прочитаем график построенной функции(укажем основные свойства):

1. Область определения D(y)=R

2.Множество значений E(y)=[-6,125; + ∞)

3. Нули функции: - 2,5 и 1.

4. у >0 при х (- 2,5; 1), у <0 при х (-∞; - 2,5) ∪(1;+∞).

5. Функция возрастает на промежутке [-0,75; +∞) и убывает на промежутке (- ∞; - 0,75].

6. x = - 0,75 –точка минимума.
7.Наименьшее значение функции y_{min} = - 6,125 при x = - 0,75.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$.
2. Найдите значение функции $f(x)=X^3+5$ в точке с абсциссой x= 2
3. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ на отрезке $[0;3]$.
4. Исследуйте на чётность и нечетность функцию
   а) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{3x^2+5}$; б) $f(x)=6x^5+x^4\sin 2x\cdot\cos x$.

5. Постройте график функции $y=(x+3)^2-1$. Пользуясь графиком, найдите область определения, область значения, промежутки возрастания и убывания функции, экстремум функции.
6. Найдите функцию, обратную к функции y=5x+13
   Постройте график данной функции и график обратной к данной функции; укажите область определения и множество значений каждой из них.

Контрольные вопросы:

1. Понятия Функция?
2. Область определние функции7
3. Множество значений?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.
2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки:

значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.
Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 28
Графическая интерпретация.

Цель: рассмотреть понятия «график функции», «функциональная зависимость», основные примеры функциональной зависимости

Теоретический материал

✔График функции

Функция и график функций - это понятия, которые используются практически в каждой области знаний. С функциональной зависимостью каждый из нас сталкивается даже тогда, когда просматривает прогноз погоды, поскольку на многих сайтах показывают график зависимости температуры от времени или дней. Во многих группах в социальных сетях можно просмотреть статистику посещений группы - все это объясняет математика, а именно функции.

Чтобы задать функцию на координатной плоскости, необходимо задать произвольное значение аргумента, по которому рассчитать значение функции. Если таких точек на плоскости будет задано бесконечное множество, то мы получим график заданной функции. Чем ближе будут браться точки друг к другу, тем точнее будет график.

✔Функциональная зависимости

Функциональная зависимость - форма устойчивой взаимосвязи между объективными явлениями или отражающими их величинами, при которой изменение одних явлений вызывает определенное количественное изменение других. Объективно Ф. з. проявляется в виде законов и отношений, обладающих точной количественной определенностью. Они могут быть в принципе выражены в виде уравнений, объединяющих данные величины или явления как функцию и аргумент. Ф. з. может характеризовать связь:

1) между свойствами и состояниями материальных объектов и явлений;

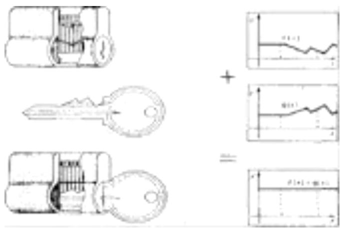
2) между самими объектами, явлениями или же материальными системами в рамках целостной системы более высокого порядка;

3) между объективными количественными законами, находящимися в отношении субординации, в зависимости от их общности и сферы действия;

4) между абстрактными математическими величинами множествами, функциями или структурами, безотносительно к тому, что они выражают.

Ключ к небольшой математической проблеме

Отметим, что не всякую функциональную зависимость удается выразить краткой формулой, мы не случайно в качестве примера предоставляем вам, ключ от дверного замка: сейчас он в буквальном смысле слова послужит ключом к небольшой математической проблеме, к которой нас подводит беседа о функциях. Знаете ли вы, как таким ключом открывается дверной замок? Что происходит внутри этого слесарно-механического устройства, когда вы вставляете ключ в замочную скважину и делаете положенное число оборотов?



Чтобы замок открылся, нужно провернуть барабан, в котором сделана скважина. Но этому препятствуют штифты, стоящие тесным строем внутри скважины, скользящие вверх-вниз. Каждый из штифтов нужно поднять на такую высоту, чтобы их верхние торцы оказались вровень с поверхностью барабана. Если они выступят за нее, то войдут в прорезь обоймы, расположенную точно над заочной скважиной; если не достигнут поверхности барабана, то из прорези обоймы находящиеся там штифты вдвинутся в замочную скважину. И в том и в другом случае вращение барабана будет застопорено.

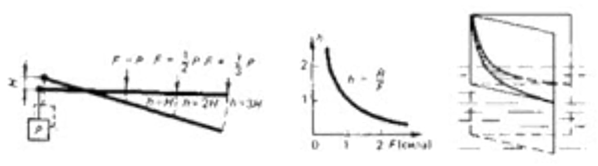
Штифты в замочной скважине поднимает ключ, вдвигаемый в нее. При этом высота каждого штифта, будучи сложена с высотой профиля ключа в соответствующей точке, должна дать в сумме диаметр барабана. Только тогда он провернется.

Ну а причем здесь функция? Да притом, что, с точки зрения математика, вся эта механика есть не что иное, как операция сложения двух функций. Одна из них — это профиль ключа. Другая — линия, очерчивающая верхние торцы штифтов, когда замок заперт.

Операция сложения функций состоит в том, что в каждой точке из общей области их определения к значению одной функции прибавляется значение другой.

Золотое правило механики

Вся богатейшая семья механизмов, окружающих современного человека, начиналась когда-то с семи простых машин. Древние знали рычаг, блок, клин, ворот, винт, наклонную плоскость и зубчатые колеса. Эти нехитрые по теперешним представлениям устройства умножали силу человека. Но, во сколько раз выиграешь в силе — во столько же раз проиграешь в расстоянии. Так гласит золотое правило механики, заключающее в себе теорию семи простых машин.



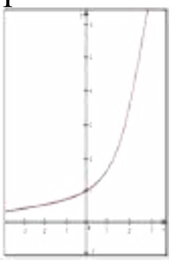
График, приведенный на этой странице, есть наглядное выражение знаменитого правила. По горизонтальной оси отложена сила, с которой, например, нужно давить на плечо рычага, чтобы поднять заданный груз на заданную высоту. По вертикальной оси — расстояние, которое пройдет при этом точка приложения силы. Линия, выражающая такую функциональную зависимость, называется гиперболой.

Закон обратной пропорциональности глядит на нас и со шкалы радиоприемника. Вы крутите ручку настройки, и стрелка движется вдоль шкалы, на которой два ряда чисел — метры и мегагерцы, длина волн и их частота. Длина волн растет, частота падает. Но присмотритесь: при любом сдвиге стрелки во сколько раз увеличилась длина волны, во столько же раз упала частота.

График гиперболы можно увидеть на лабораторном столе физика, демонстрирующего явления капиллярности. В штативе несколько тонких стеклянных трубочек, расположенных в порядке возрастания диаметров. Известно, что в тонком канале смачивающая жидкость поднимается тем выше, чем меньше его диаметр. Поэтому в самом узком канале жидкость поднялась выше всего, в другом канале, диаметр которого в два раза больше, — в два раза ниже, в третьем, что толще первого в три раза, — в три раза ниже и так далее.

Информационный бум

Сейчас много говорят об информационном буме. Поток информации захлестывает: утверждают, что ее количество удваивается каждые десять лет. Изобразим этот процесс наглядно, в виде графика некоторой функции.



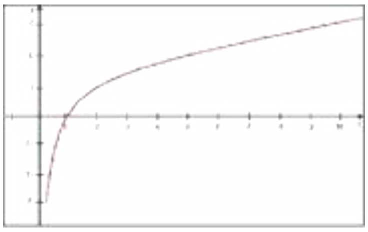
Примем объем информации в некоторый год за единицу. Поскольку эта величина послужит нам началом дальнейших построений, отложим ее над началом координат, в которых будет строиться график, по вертикальной оси. Отрезок, вдвое больший, восставим над единичой отметкой горизонтальной оси, считая, что эта отметка соответствует первому десятку лет.

Еще вдвое больший отрезок восставим над точкой «два», соответствующей второму десятку, еще вдвое больший — над точкой «три». Декада за декадой— избранные нами значения аргумента выстроятся по горизонтальной оси в порядке равномерного нарастания, по закону арифметической прогрессии: один, два, три, четыре... Значения функции отложатся над ними, возрастая каждый раз вдвое, — по закону геометрической прогрессии: два, четыре, восемь, шестнадцать...

Звездный график

Сколько звезд на небе? Одним из первых, кто попытался точно ответить на этот вопрос, был древнегреческий астроном Гиппарх. При его жизни в созвездии Скорпиона вспыхнула новая звезда. Гиппарх был потрясен: звезды смертны, они, как люди, рождаются и умирают. И чтобы будущие исследователи могли следить за возникновением и угасанием звезд, Гиппарх составил свой звездный каталог. Он насчитал около тысячи звезд и разбил их по видимому блеску на шесть групп. Самые яркие Гиппарх назвал звездами первой величины, заметно менее яркие — второй, еще столь же менее яркие — третьей и так далее в порядке равномерного убывания видимого блеска — до звезд, едва видимых невооруженным глазом, которым была присвоена шестая величина.

Когда ученые получили в свое распоряжение чувствительные приборы для световых измерений, стало возможным точно определять блеск звезд. Стало возможным сравнить, насколько соответствует данным таких измерений традиционное распределение звезд по видимому блеску, произведенное на глаз.Оценки того и другого рода сведем на одном графике. От каждой из шести групп, на которые звезды распределил Гиппарх, возьмем по одному типичному представителю. По вертикальной оси будем откладывать блеск звезды в единицах Гиппарха, то есть ее звездную величину, по горизонтальной — показания приборов. С каждым шагом по шкале звездных величин прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, как могло бы показаться, а примерно в два с половиной раза. Образно говоря, глаз сравнивает источники света по блеску, задаваясь вопросом «во сколько раз?», а не вопросом «на сколько?». Мы отмечаем не абсолютный, а относительный прирост блеска. И когда нам кажется, что он возрастает или убывает равномерно, в действительности мы шагаем по его шкале все более размашистыми шагами, покрывая при этом поистине гигантский диапазон: в миллион миллионов раз различаются по блеску источники света, самый слабый и самый мощный, воспринимаемые человеческим глазом.

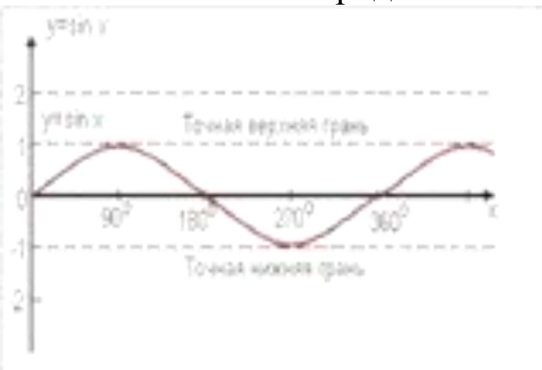


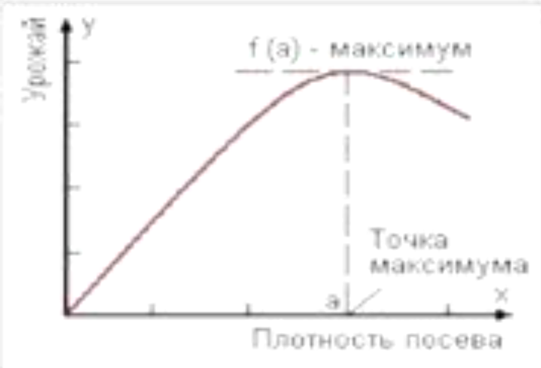
Именно в силу описанной физиологической особенности звезды, ярко горящие на ночном небе, не видны днем, тонут в ослепительном блеске солнца, рассеянном по небосводу. И там и здесь сияние звезд дает одну и ту же добавку к свету фона. Однако в первом случае (ночью) эта добавка велика по сравнению с мерцанием неба, во втором же (днем) составляет весьма незначительную долю от солнечного блеска (менее чем миллиардную даже для самых ярких звезд). Оттого же и голос солиста, когда его пение подхватывает хор, тонет в многоголосом звучании...

Математические портреты пословиц

Современная математика знает множество функций, и у каждой свой неповторимый облик, как неповторим облик каждого из миллиардов людей, живущих на Земле. Однако при всей непохожести одного человека на другого у каждого есть руки и голова, уши и рот. Точно так же облик каждой функции можно представить сложенным из набора характерных деталей. В них проявляются основные свойства функций.

Функции — это математические портреты устойчивых закономерностей, познаваемых человеком. Чтобы проиллюстрировать характерные свойства функций, нам показалось естественным обратиться к пословицам. Ведь пословицы — это тоже отражение устойчивых закономерностей, выверенное многовековым опытом народа.





«Выше меры конь не скачет» Если представить траекторию скачущего коня как график некоторой функции, то высота скачков в полном соответствии с пословицей будет ограничена сверху некоторой «мерой». Это будет знакомый график функции синуса.

«Пересев хуже недосева» Урожай лишь до некоторой поры растет вместе с плотностью посева, дальше он снижается, потому что при чрезмерной густоте ростки начинают глушить друг друга. Эта закономерность станет особенно наглядной, если изобразить ее графиком, где урожай представлен как функция плотности посева. Урожай максимален, когда поле засеяно в меру. Максимум— это наибольшее значение функции по сравнению с ее значениями во всех соседних точках. Это как бы вершина горы, с которой все дороги ведут только вниз, куда ни шагни.

«Не круто начинай, круто кончай» **и** «Горяч на почине, да скоро остыл» функциональный зависимость математический уравнение

Обе функции, зависящие от времени, возрастающие. Но, как видно, расти можно по-разному. Наклон одной кривой постоянно увеличивается. Рост функции усиливается с ростом аргумента. Такое свойство функции называется вогнутостью.

Наклон другой кривой неизменно уменьшается. Рост функции слабеет с ростом аргумента. Такое свойство функции называется выпуклостью.

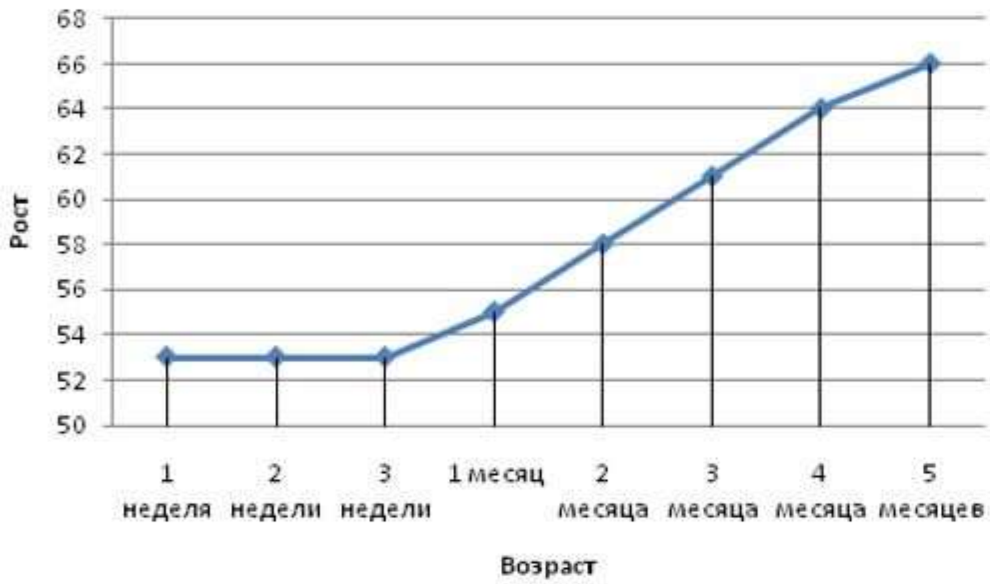
Практическая часть:

✓Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях

1. Давайте рассмотрим процесс развития ребенка на протяжении первых пяти месяцев жизни и запишем данные в таблицу. В результате этого получим:

Возраст	0 недель	1м.	2м.	3м.	4м.	5м.
Рост, см	53	55	58	61	64	66

А теперь давайте по оси ОУ направим рост ребенка, а по оси ОХ его возраст. В результате расстановки и соединения получившихся точек получим:



2. Достаточно ярким примером функциональной зависимости является кардиограмма. Она показывает интенсивность и частоту сокращений сердечной мышцы во времени.

3. А теперь давайте рассмотрим пример из физики. Представьте себе, что лед нагревают до температуры плавления, затем без изменения температуры происходит разрушения кристаллической решетки, то есть он начинает плавиться. После этого воду начинают нагревать до более высокой температуры, а затем начинается обратный процесс.

Все вышеописанное можно проиллюстрировать на графике:

Контрольные вопросы:

1. Функциональная зависимость?
2. Графики функций?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 29
Обратные функции и их графики.

Цели занятия:

- освоение знаний об обратных функциях;
- овладение умениями изображать графики обратных функций и описывать их свойства;
- использование знаний о характере поведения функций для описания и анализа реальных зависимостей.

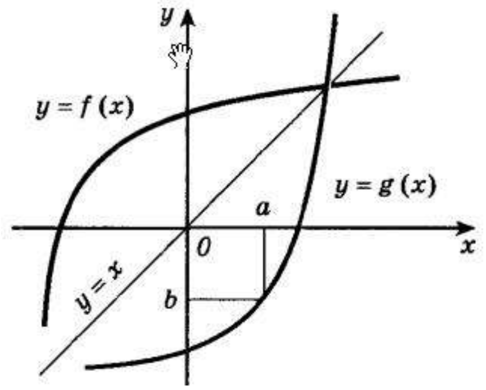
Понятие об обратной функции

Мы уже сталкивались с задачей, когда по заданной функции f и заданному значению её аргумента необходимо было вычислить значение функции в этой точке. Но иногда приходится сталкиваться с обратной задачей: найти по известной функции f и её некоторому значению y значение аргумента, в котором функция принимает данное значение y.
Функция, которая, принимает каждое свое значение в единственной точке своей области определения, называется обратимой функцией.
Например, линейная функция будет являться **обратимой функцией**. А квадратичная функция или функция синус не будет являться обратимыми функциями. Так как одно и то же значение функция может принимать при различных аргументах.

Обратная функция

Положим, что f есть некоторая произвольная обратимая функция. Каждому числу из области её значений y0, соответствует лишь одно число из области определения x0, такое что f(x0) = y0.
Если теперь мы каждому значению x0 поставим в соответствие значение y0, то получим уже новую функцию. Например, для линейной функции f(x) = k * x + b функция g(x) = (x - b)/k будет являться обратной.
Если некоторая функция **g** в каждой точке **x** области значений обратимой функции f принимает значение y такое, что f(y) = x, то говорят, что функция **g** – есть обратная функция к f.
Если у нас будет задан график некоторой обратимой функции f, то для того чтобы построить график обратной функции, можно пользоваться следующим утверждением: график функции f и обратной к ней функции g будут симметричны относительно прямой, заданной уравнением y = x.

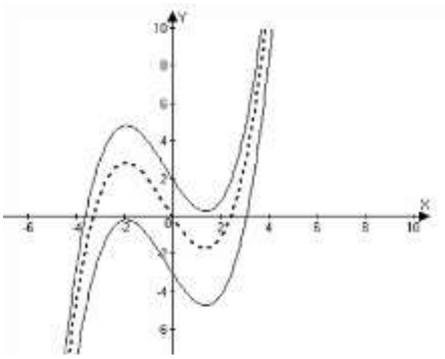
Если функция g является обратной к функции f, то функция g будет являться обратимой функцией. А функция f будет обратной к функции g. Обычно говорят, что две функции f и g взаимно обратные друг к другу.
На следующем рисунке представлены графики функций f и g взаимно обратных друг к другу.



Выведем следующую **теорему**:
если функция f возрастает (или убывает) на некотором промежутке A, то она обратима.
Обратная ***к а функция g, определенная в области значений функции f, также является возрастающей (или соответственно убывающей) функцией.***
Данная теорема называется **теоремой об обратной функции**.

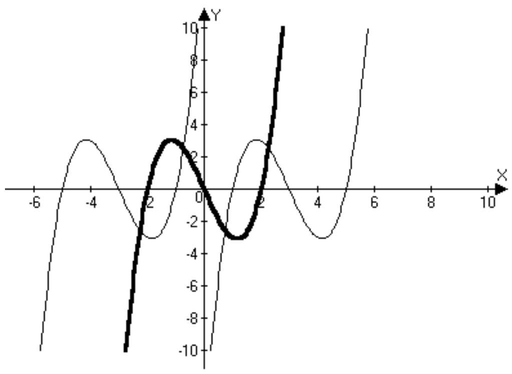
Простейшие преобразования графиков функций

1) **y = f(x) + b** – график функции получается из графика функции y = f(x) путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от OY.

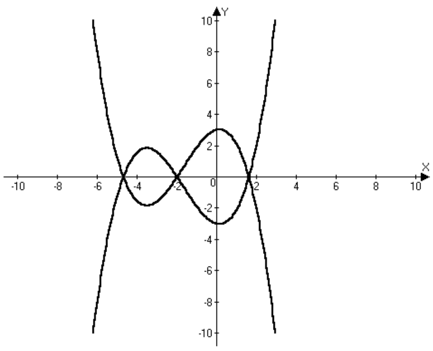


при этом, если b>0, то график функции f(x) + b располагается выше графика функции f(x), если b<0, то ниже этого графика.

2) **y = f (x + b)** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью параллельного переноса этого графика на величину b вдоль оси OX, при этом, если b>0, то сдвиг влево, а если b<0, то сдвиг вправо.



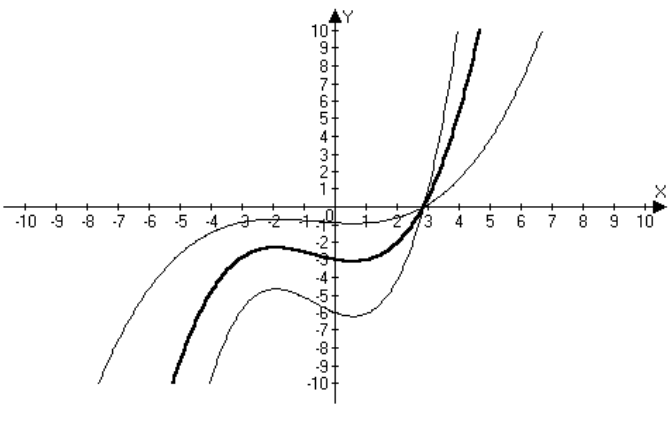
3) **y = - f(x)** – график симметричен графику y = f(x) относительно оси OX



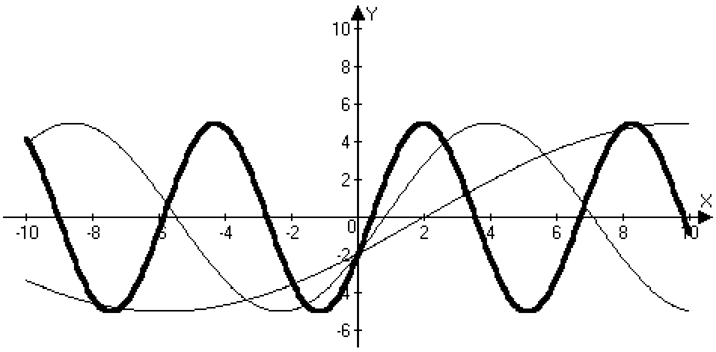
Указанные преобразования не изменяют масштаба графика функции.

Рассмотрим преобразования графиков функций, которые изменяют масштаб графика

4) y = af(x) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия графика по оси OY пропорционально коэффициенту *a*, причем,
если *a* > 1, то все ординаты графика af(x) увеличиваются в *a* раз, если a < 1, то уменьшаются в *a* раз.

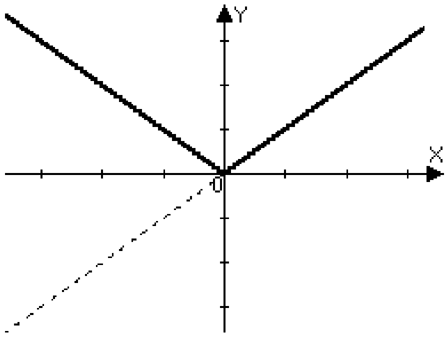


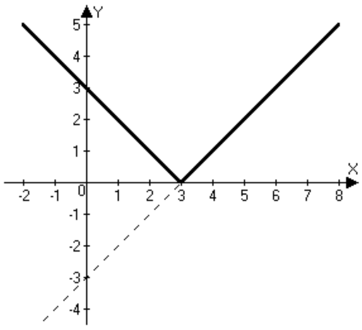
5) y = f(ax) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия вдоль оси OX пропорционально коэффициенту *a*, причем, если, *a* > 1, то график сжимается в *a* раз, если 0 < a <1, то растягивается в 1/*a* раз.



6) $y = |f(x)|$ - для построения этого графика нужно построить график функции y = f(x) и отобразить относительно оси OX те части графика, которые расположены ниже этой оси.

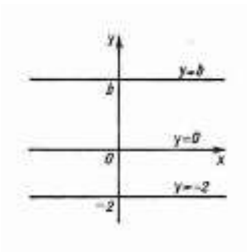
$y = |x|$ $y = x - 3$; $y = |x-3|$



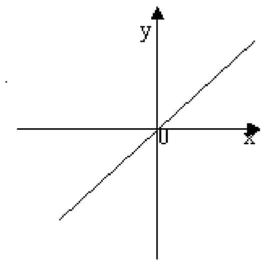


ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

1. **Постоянная функция $y = b$**



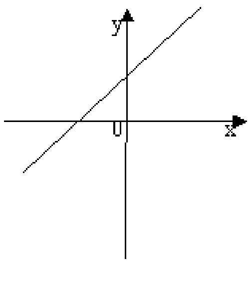
2. **Прямая пропорциональность $y = kx$**



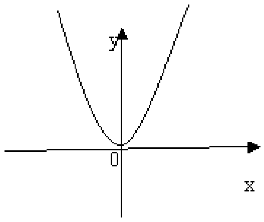
3. **Линейная функция $y = kx + b$, $k \neq 0$**

Область определения: $x \in R$

Область изменения: $y \in R$



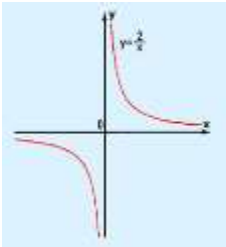
4.Квадратичная функция $y = x^2$



Область определения: $x \in R$
Область изменения: $y \geq 0$

5. Обратная пропорциональная зависимость $y = \frac{2}{x}$

Область определения: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Область изменения: $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



ВАРИАНТ – 1	ВАРИАНТ – 2
1.Постройте график функции $y = x - 2{,}5$. Укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.	1.Постройте график функции $y = -x + 1{,}5$. Укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.
2. Постройте графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = -x + 2$ укажите координаты точек пересечения этих графиков.	2. Постройте графики функций $y = -x^2 + 4$ и $y = x - 2$ укажите координаты точек пересечения этих графиков.
3. Найдите функцию обратную данной и постройте графики данных функций в одной системе координат. $y = 6x - 1$	3. Найдите функцию обратную данной и постройте графики данных функций в одной системе координат. $y = 3x + 3$
4. Параболу $y = x^2$ перенести параллельно самой себе вдоль оси ординат вниз на 4 единицы. Запишите новое уравнение параболы.	4. Параболу $y = x^2$ перенести параллельно самой себе вдоль оси ординат вверх на 3,5 единицы. Запишите новое уравнение параболы.
5. Найдите функцию обратную данной: $y = 3x - 2$	5. Найдите функцию обратную данной: $y = 5x + 8$

6. Постройте график функции $y=-\frac{6}{x}$. Какое значение принимает функция при x=1,5	6. Постройте график функции $y=\frac{10}{x}$. Какое значение принимает функция при x=2,5

Контрольные вопросы:

1. Покажите, что для функции y = 5x – 3 существует обратная функция, и найдите ее аналитическое выражение.

2. Покажите, что для функции $y = x^2$, где x принадлежит промежутку

(-∞; 0], существует обратная функция, и найдите ее аналитическое выражение.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1**.** Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала,

руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

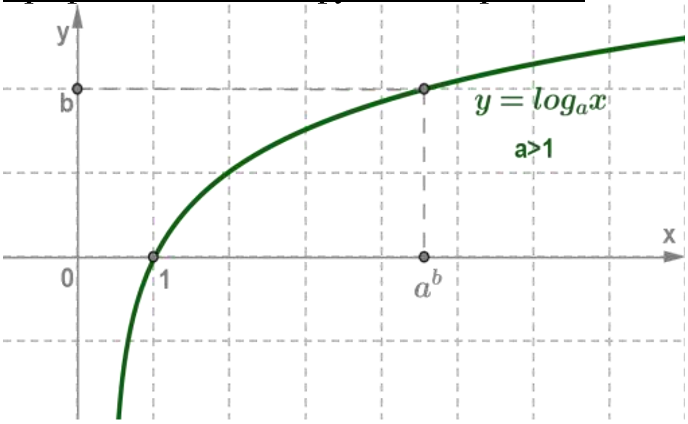
Практическое занятие № 30
Область определения логарифмических функций.

Цель занятия - овладение умениями изображать график логарифмической функции и применять ее свойства при решении задач;

Краткие теоретические сведения

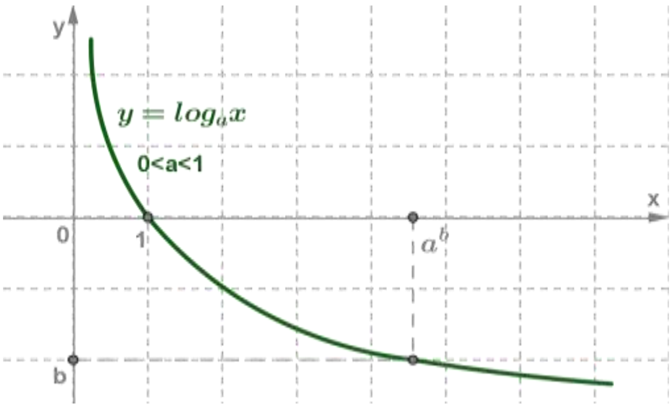
Определение Функция y = log $_a$ x, где a > 0, a ± 1, называется логарифмической.

График и свойства функции при a>1



1. D(f) =R$_+$
2. E(f) = R
3. График функции проходит через точку (1;0)
4. Функция возрастающая

График и свойства функции при 0 <a<1



1. D(f) =R$_+$
2. E(f) = R

3. График функции проходит через точку (1;0)
4. Функция убывающая

Варианты заданий

№ 1. Сравнить значения выражений

А) $\log_3 7$ и $\log_3 15$

Б) $\log_{1/2} 3$ и $\log_{1/2} 5$

№ 1. Сравнить значения выражений

А) $\log_4 9$ и $\log_4 7$

Б) $\log_{1/3} 11$ и $\log_{1/3} 9$

№ 2 Построить график функции и описать свойства

У = $\log_3 x - 2$

№ 2 Построить график функции и описать свойства

У = $\log_3 (x - 1)$

№ 3 Решить графически уравнение

$\log_{1/6} x = x - 6$

№ 3 Решить графически уравнение

$\log_{1/3} x = x - 4$

Контрольные вопросы:

1. Логарифмическая функция и ее график.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 31
Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников.

Цель: отработка навыков построения многогранников и их сечений, развитие пространственного воображения.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

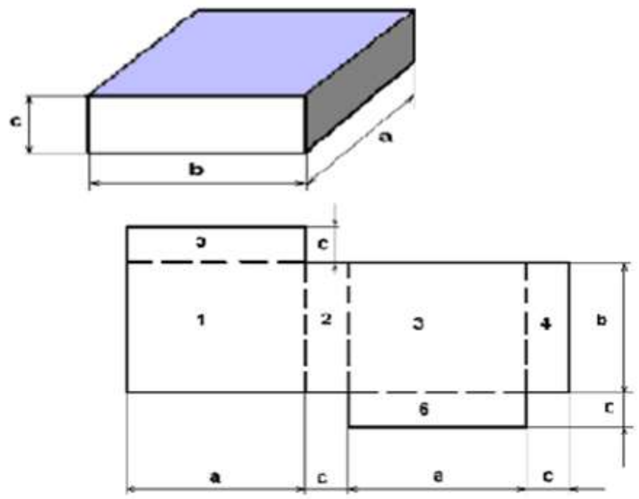
Ход работы.

Теоретический материал

Многогранником называется тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. Эти многоугольники называются **гранями**, а их стороны – **ребрами**, их вершины – **вершинами** многогранника. Отрезки, соединяющие вершины не лежащие в одной грани, называются **диагоналями** многогранника. **Разверткой поверхности многогранника** называют плоскую фигуру, полученную при совмещении с плоскостью чертежа всех граней многогранника в последовательности их расположения на многограннике.

Например: Разверткой пирамиды является плоская фигура, которая получена отложением боковых граней в плоскость основания, где каждая боковая грань так же соединена общей стороной с основанием.

Развертка поверхности **прямой** **призмы** представляет собой плоскую фигуру, составленную из боковых граней – прямоугольников и двух равных между собой многоугольников оснований.



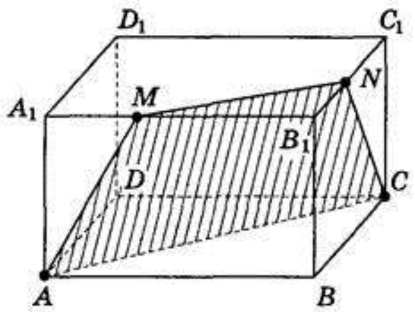
Параллелепипед. Развертка параллелепипеда. рис.1

Построить сечение многогранника плоскостью – это значит указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Наибольшее число сторон многоугольника полученного в сечении многогранника плоскостью, равно числу граней многогранника. **Правила построения сечений многогранников:**

1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;

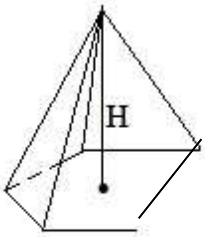
2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого: а) ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым. **Задача1.**

Построить сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, проходящей через вершины A, C и внутреннюю точку M



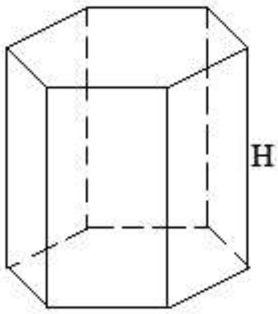
ребра A_1B_1 (рис.) Рис. 78 **Решение:** Сечение плоскости α с двумя гранями получим, построив отрезки AC и AM. Поскольку плоскости граней ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то параллельны и их линии пересечения с плоскостью α, поэтому, построив MN || AC и отрезок MC, получим сечение - трапецию AMKC.

Пирамида.



1) боковая поверхность $S_{бок.}$ равна сумме площадей боковых граней пирамиды; $S_{бок.}=\frac{1}{2}P_{осн.}\cdot h_{бок.}$

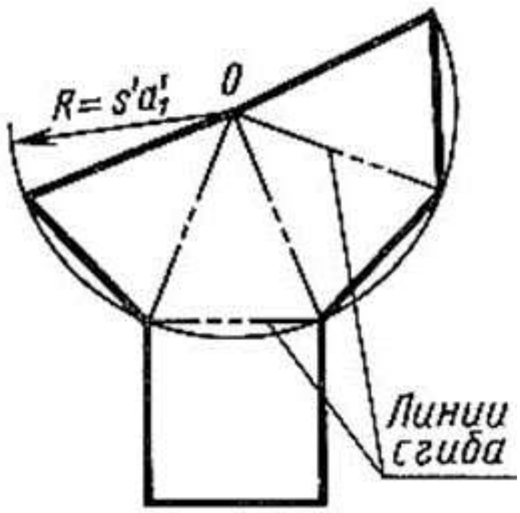
2) полная поверхность $S_{полн.}=S_{осн.}+S_{бок.}$; **Прямая призма.**



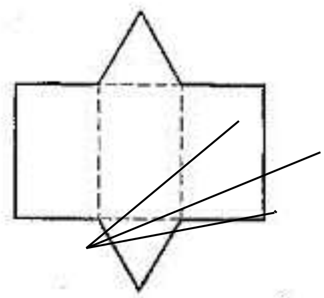
Боковая поверхность $S_{бок.}=P_{осн.}\cdot H$;
Полная поверхность $S_{полн.}=2S_{осн.}+S_{бок.}$;

Задания для самостоятельного решения:

№ 1.Начертить заданную развертку в тетрадь. Определить вид заданного многогранника и сделать его чертеж.

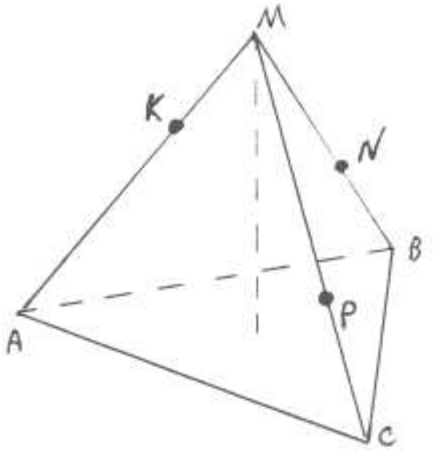


1).



2)

№2.Решить задачу:
1).Постройте сечение пирамиды по заданным точкам.



2).В прямой треугольной призме в основании лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и прилежащим углом 30^0. Найдите высоту, если она равна большему катету.

3). В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а боковое ребро-13см. Найдите апофему пирамиды.

Контрольные вопросы:

1. Виды многогранников?
2. Правило построения многогранника?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № №32
Симметрия тел вращения и многогранников

Цель работы: Рассмотреть виды симметрий в пространстве и многогранников; выполнить задания практической работы.

<u>Основные теоретические сведения.</u>

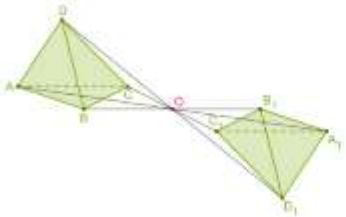
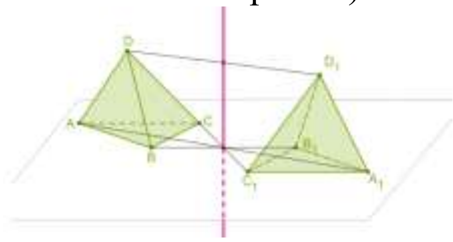
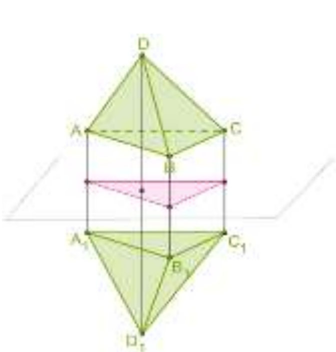
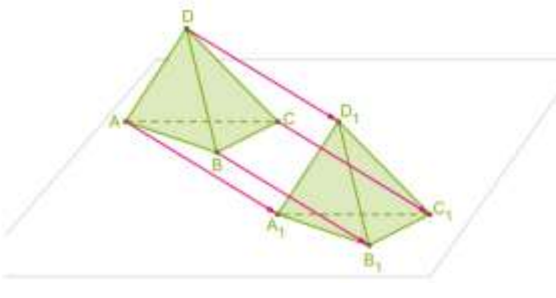
Движением называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

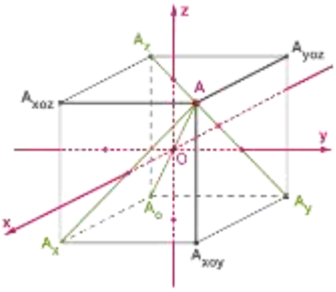
Под движением пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в некие точки A1 и B1 так, что|AB|=|A1B1|.

При движении в пространстве

- прямые переходят в прямые,
- полупрямые — в полупрямые,
- отрезки — в отрезки,
- сохраняются углы между прямыми.

Виды движения в пространстве

1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки): 	2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой): 
3. Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости): 	4. Параллельный перенос (точки переносятся на данный вектор): 

 	**Пример 1.** Если в этой координатной системе дана точка $A(1;8;10)$, то в… 1. …центральной симметрии относительно начала координат точка A переходит в точку $A0(-1;-8;-10)$. 2. …осевой симметрии относительно оси Ox точка A переходит в точку $Ax(1;-8;-10)$. оси Oy точка A переходит в точку $Ay(-1;8;-10)$. оси Oz точка A переходит в точку $Az(-1;-8;10)$. 3. …в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy) точка A переходит в точку $Axoy(1;8;-10)$. координатной плоскости (yOz) точка A переходит в точку $Ayoz(-1;8;10)$. координатной плоскости (xOz) точка A переходит в точку $Axoz(1;-8;10)$.

***Симметрия* – это закономерная повторяемость элементов (или частей) фигуры или какого-либо тела, при которой фигура совмещается сама с собой при некоторых преобразованиях (вращение вокруг оси, отражение в плоскости).**

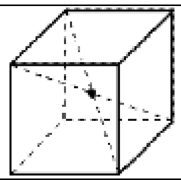
Понятие симметрии включает в себя такие понятия, как: *ось симметрии, центр симметрии и плоскость симметрии.*

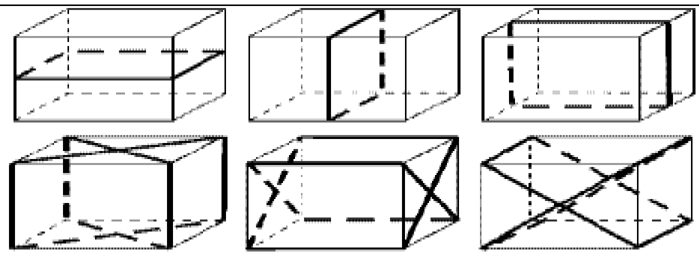
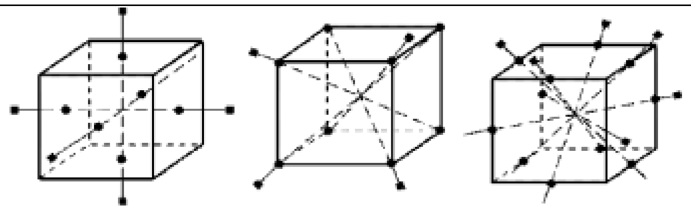
1) Ось симметрии - воображаемая ось, при повороте вокруг которой на некоторый угол, фигура совмещается сама с собой в пространстве (α)

2) Центр симметрии - это точка внутри многогранника, в которой пересекаются и делятся пополам прямые, соединяющие одинаковые элементы многогранника (грани, рёбра, углы) (С).

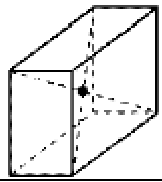
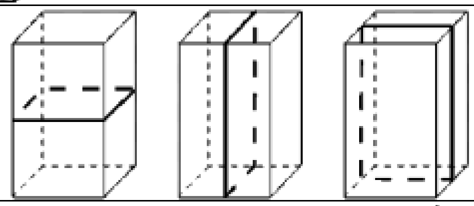
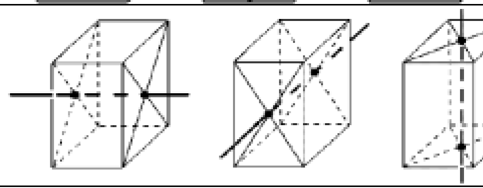
3) Плоскость симметрии делит многогранник на 2 зеркально равные части (Р).

Симметрия в кубе.

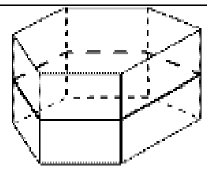
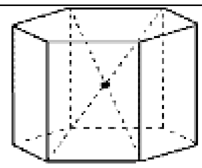
а) Центр симметрии (центр куба) - точка пресечения диагоналей куба.	

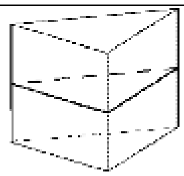
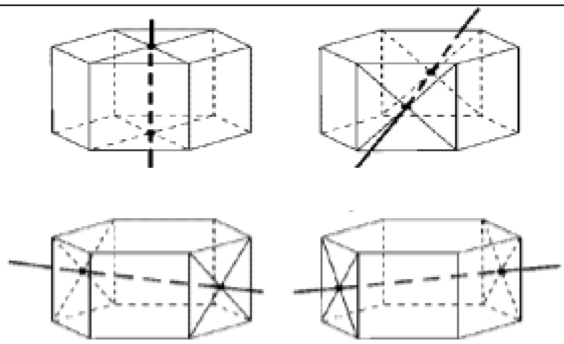
б) Плоскости симметрии (9): 1) 3 плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных ребер; 2) 6 плоскостей симметрии, проходящие через противолежащие ребра.	
в) Оси симметрии (13): 1)3 оси, проходящие через центры противолежащих граней; 2) 4 оси симметрии, проходящие через противолежащие вершины; 3) 6 осей, проходящие через середины противолежащих рёбер.	

Симметрия в параллелепипеде.

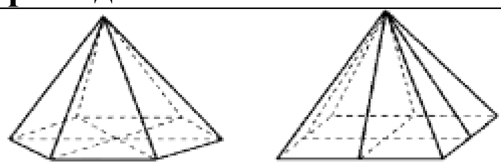
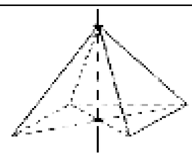
а) Центр симметрии - точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда.	
б) Плоскость симметрии. 3 плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных рёбер.	
в) Оси симметрии. 3 оси симметрии, проходящие через точки пересечения диагоналей противолежащих граней	

Симметрия в призме.

1) Симметрия прямой призмы. Одна плоскость симметрии, проходящая через середины боковых рёбер.	
2) Симметрия правильной призмы. **а) Центр симметрии**. При чётном числе сторон основания центр симметрии - это точка пересечения диагоналей правильной призмы.	

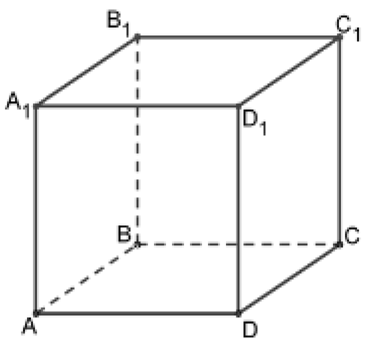
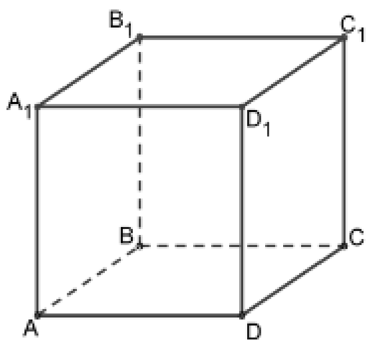
б) Плоскости симметрии: 1) плоскость, проходящая через середины боковых рёбер; 2) при чётном числе сторон основания - плоскости, проходящие через противолежащие рёбра.	
в) Ось симметрии: а) при чётном числе сторон основания - ось симметрии проходит через центры оснований; б) оси симметрии, проходящие через точки пресечения диагоналей противолежащих боковых граней.	

Симметрия в пирамиде.

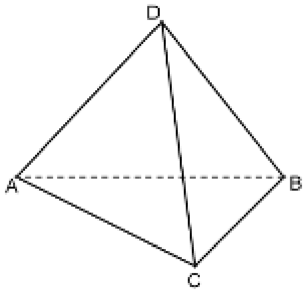
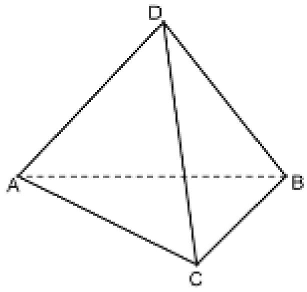
а) Плоскости симметрии: при четном числе сторон основания — а) плоскости, проходящие через противолежащие боковые ребра, и б) плоскости, проходящие через медианы, проведенные к основанию противолежащих боковых граней.	
б) Ось симметрии: при четном числе сторон основания — ось симметрии проходит через вершину правильной пирамиды и центр основания.	

Задания для выполнения

Вариант 1	**Вариант 2**
В координатной системе дана точка A(2;11;16). Определи координаты точек, в которые переходит точка A в… 1. …центральной симметрии относительно начала координат: ;; 2. …осевой симметрии относительно	В координатной системе дана точка A(11;4;4). Определи координаты точек, в которые переходит точка A в… 1. …центральной симметрии относительно начала координат: ;; 2. …осевой симметрии относительно

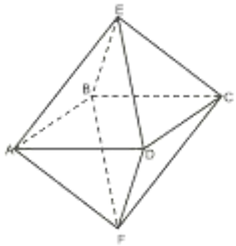
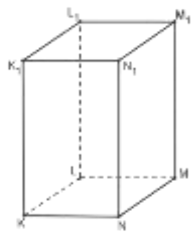
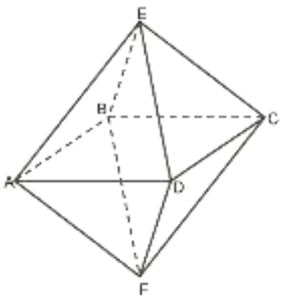
оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 …в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ;	оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 …в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ;
Дан куб ABCDA1B1C1D1.  1. С помощью каких движений вершиныB,B1,C1,C переходят соответственно в вершины A,A1,D1,D? ☐ симметрия относительно оси ☐ все названные движения ☐ симметрия относительно точки ☐ симметрия относительно плоскости ☐ ни одно из названных	Дан куб ABCDA1B1C1D1.  1. С помощью каких движений вершиныB,B1,C1,C переходят соответственно в вершины A,A1,D1,D? ☐ симметрия относительно плоскости ☐ все названные движения ☐ симметрия относительно оси ☐ параллельный перенос ☐ ни одно из названных

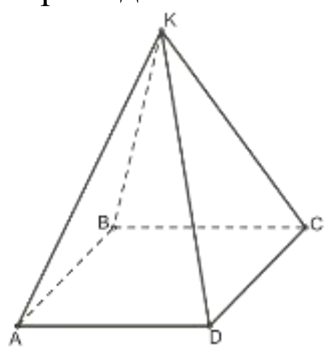
движений ☐ параллельный перенос 2. С помощью каких движений вершиныA1,B1,C1,D1 переходят соответственно в вершины C,D,A,B? ○ все названные движения ○ симметрия относительно оси ○ параллельный перенос ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно плоскости ○ ни одно из названных движений 3. С помощью каких движений вершиныA,B,C,D переходят соответственно в вершины C,B,A,D? ○ ни одно из названных движений ○ симметрия относительно плоскости ○ параллельный перенос ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно оси ○ все названные движения	движений ☐ симметрия относительно точки 2. С помощью каких движений вершиныA,A1,B1,B переходят соответственно в вершины C1,C,D,D1? ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно плоскости ○ ни одно из названных движений ○ все названные движения ○ параллельный перенос ○ симметрия относительно оси 3. С помощью каких движений вершиныD,D1,C1,C переходят соответственно в вершины C1,D1,D,C? ○ все названные движения ○ симметрия относительно плоскости ○ ни одно из названных движений ○ симметрия относительно оси ○ симметрия относительно точки ○ параллельный перенос

Дан правильный тетраэдр DABC.  1. С помощью каких движений вершины (ABD) переходят соответственно в вершины A,C,B,D? ○ все названные движения ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно плоскости ○ ни одно из названных движений ○ параллельный перенос ○ симметрия относительно оси 2. С помощью каких движений все точки грани (ABD) переходят в точки этой же грани (грань отображается на себя)? ○ ни одно из названных движений ○ симметрия относительно плоскости ○ параллельный перенос ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно оси ○ все названные движения	Дан правильный тетраэдр DABC.  1. С помощью каких движений вершины (ACD) переходят соответственно в вершины A,C,B,D? ○ ни одно из названных движений ○ параллельный перенос ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно оси ○ все названные движения ○ симметрия относительно плоскости 2. С помощью каких движений все точки грани (ACD) переходят в точки этой же грани (грань отображается на себя)? ○ симметрия относительно точки ○ симметрия относительно оси ○ все названные движения ○ симметрия относительно плоскости ○ параллельный перенос ○ ни одно из названных движений

<table>
<tr>
<td>Точка A(−3;−8;−8) в центральной симметрии относительно
центра C переходит в точку B(1;4;1).
Определи координаты точки C .

Ответ: C(; ;)</td>
<td>Точка A(−2;9;1) в центральной симметрии относительно
центра C переходит в
точку B(1;−3;−1).
Определи координаты точки C .

Ответ: C(; ;)</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Сколько плоскостей симметрии имеет октаэдр?
</td>
<td>2. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная четырёхугольная призма?
</td>
</tr>
<tr>
<td>1. При каких
движениях октаэдр отображается на себя (все точки многогранника переходят в точки этого же многогранника)?


☐ симметрия относительно плоскости
☐ симметрия относительно точки
☐ это не возможно
☐ параллельный перенос
☐ симметрия относительно оси
☐ при всех движениях
</td>
<td>2. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная четырёхугольная пирамида?
</td>
</tr>
</table>

Контрольные вопросы:

1. Симметрия
2. Ось симметрии
3. Центр симметрии
4. Плоскость симметрии

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 33
Вычисление площадей и объемов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы объемов тел и поверхностей вращения;

уметь:

- вычислять объемы тел и поверхностей вращения.

Сведения из теории:

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба

$$V=a^3,$$

где a – длина грани куба.

Объем призмы

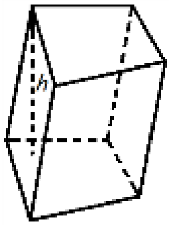


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту:

$$V=S_o h,$$

где S_o – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

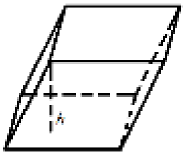


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V=S_o \cdot h,$$

где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

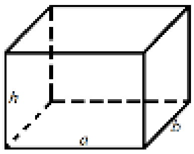


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V=a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

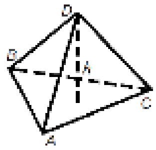


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где $S_о$ – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

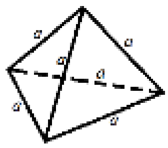


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

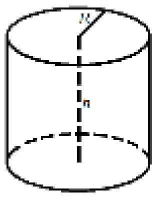


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi R^2 h$$

или

$$V = S_о h,$$

где $S_о$ – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, π=3,141592.

Объем конуса

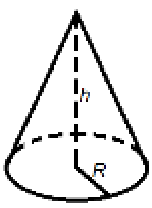


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

или

$$V = \frac{1}{3}S_o h,$$

где S_o – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, π=3,141592.

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R – радиус шара, π=3,141592.

Пример 1.

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Решение:

обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$(x+2)^3=x^3+98,$$
$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+98,$$
$$6x^2+12x-90=0,$$
$$x^2+2x-15=0,$$
$$x_1=-5,\ x_2=3.$$

$x_1=-5$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

Пример 2.

Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.

Решение:

трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V=\pi R^2 h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi 0{,}4^2 1{,}6}{\pi 0{,}8^2 0{,}8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 *м*, 50 *м* и 36 *м*. Найти ребро равновеликого ему куба.
2) Измерения прямоугольного бруса: 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Если увеличить каждое его ребро на *x см*, то поверхность увеличится на 54 $см^2$. Как увеличится его объем?
3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.
4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 *м* и 12 *м*, каждое из боковых ребер равно 12,5 *м*. Найти объем пирамиды.
5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 *см*, а основание 8 *см*. Боковые ребра равны между собой и равны 9 *см*. Найти объем пирамиды.
6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 15 *см* и образуют угол в 60^0. Меньшая диагональ параллелепипеда составляем с плоскостью основания угол 30^0. Найти объем параллелепипеда.
7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен 96π $см^3$. Найти полную поверхность конуса.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала,

руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 34
Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности.

Цель: отработка навыков вычисления члены последовательностей по общему члену; задавать формулой общий член последовательности.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

1. Теоретический материал.

Числовая последовательность – функция вида $y=f(x)$, $x\in \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел (или функция натурального аргумента), обозначается $y=f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Значения $y_1, y_2, y_3,\ldots$называют соответственно первым, вторым, третьим, … членами последовательности.

Пример 1. Вычислить первые три значения для функции $y=n^2$.

Решение: подставляя в $y=n^2$ значения $n=1$, $n=2$, $n=3$ получим первые три значения функции: $y_1=1^2=1$; $y_2=2^2=4$;$y_3=3^2=9$.

Способы задания последовательностей

Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: аналитический, описательный и рекуррентный.

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее n-го члена: $y_n=f(n)$.

Например, $y_n=2n–1$ – последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, …

2. Описательный способ задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.

Например, «Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности 1, 1, 1, …, 1, ….

Или, например, «Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, ….

3. Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например, $y_1=3$; $y_n=y_n–1+4$, если $n=2, 3, 4,\ldots$.

Здесь $y_1=3$; $y_2=3+4=7$; $y_3=7+4=11$; ….

Можно видеть, что полученная в этом примере последовательность, может быть задана и аналитически: $y_n=4n–1$.

Пример 2 .

Вычислить следующие четыре члена последовательности $y_1=1$; $y_2=1$; $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$.

Решение: из формулы $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$ видно, что каждый следующий член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому:

$$y_1=1;\ y_2=1;\ y_3=1+1=2;\ y_4=1+2=3;\ y_5=2+3=5;\ y_6=3+5=8.$$

Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Последовательность $\{y_n\}$ называют *возрастающей*, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего: $y_1<y_2<y_3< \ldots <y_n<y_{n+1}< \ldots$.

Последовательность $\{y_n\}$ называют *убывающей*, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего: $y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – *монотонные последовательности*. Например, $y_1=1$; $y_n=n^2$ – возрастающая последовательность, а $y_1=1$; $y=\dfrac{1}{n}$ – убывающая последовательность.

Последовательность называется *периодической*, если существует такое натуральное число T, что начиная с некоторого n, выполняется равенство $y_n=y_{n+T}$. Число T называется длиной периода. Например, последовательность $y_n=(-1)^n$ периодична с длиной периода $T=2$.

Пример 3. Зная несколько первых членов последовательности, написать одно из возможных выражений для общего члена: $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}$.

Решение. Заметим, что числитель каждого из заданных членов последовательности равен квадрату номера этого члена плюс единица, т.е. n^2+1. Знаменатель же образует арифметическую прогрессию 3, 8, 13, 18,… с первым членом $a_1=3$ и разностью $d=5$.

Следовательно, $a_n=a_1+d(n-1)=3+5(n-1)=5n-2$, поэтому $x_n=\dfrac{n^2+1}{5n-2}$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n=\dfrac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$.

Решение:

$$x_n=\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+1},\quad \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}=3.$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Найдите первые пять членов последовательности , отметьте эти члены последовательности на координатной прямой и укажите вид последовательности:

а) $u_n = \frac{n}{n+1}$;

б) $X_n = 4n^2+3n+1$;

в) $X_n = 3x_{n-1}+1$, $x_1=2$;

г) $X_n = (3n-6)/10$

2) Вычислите предел последовательности:

а) $\lim_{n\to\infty}(4n^2-2n+1)$

б). $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

3)Дана арифметическая прогрессия (a_n), $a_1=2$, $d=3$. Найти S_5 ; a_3+a_5.

4) Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (b_n), $b_1=3$, $q=\frac{1}{3}$. Найти: S и $b_2 \cdot b_3$

Контрольные вопросы:

2. Числовая последовательность определение?
3. Способ задание числовой последовательности?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки:

значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.
Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 35
Производная: механический и геометрический смысл производной.

Цель работы:
знать:

- систему и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

Сведения из теории:
Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

Физический (механический) смысл производной

$$S'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

Пример

Материальная точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна

$v(t) = t^3 - 2t.$

Найдите ускорение точки в момент времени t = 3.

Решение

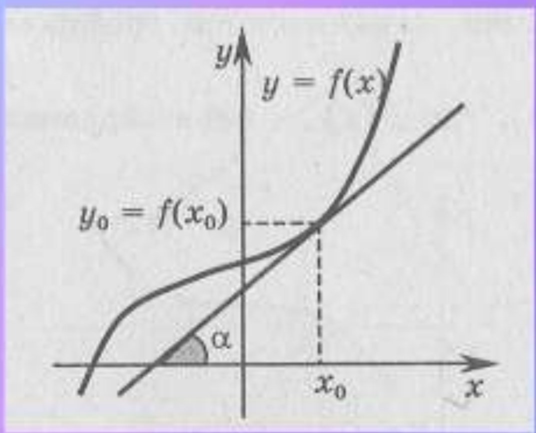
$$a(t) = v'(t)$$

$$v'(t) = (t^3 - 2t)' = 3 * t^2 - 2$$

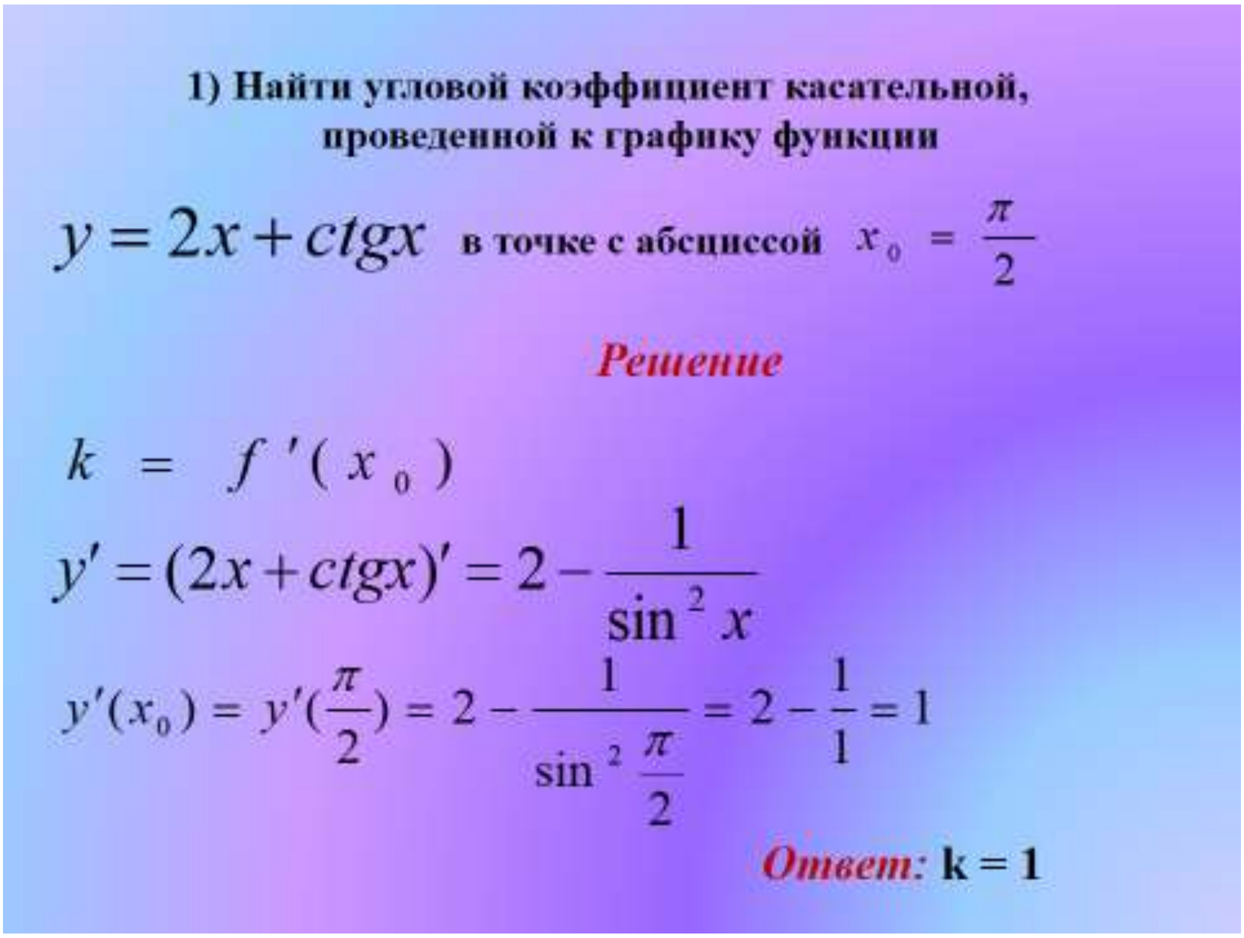
$$v'(3) = 3 * 3^2 - 2 = 25$$

Ответ: $a(3) = 25$

Геометрический смысл производной



$$k = tg\,\alpha = f'(x_0)$$



Вариант 1

Задание: Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t)$. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени t_0.

1. $S(t) = t^3 + 4t^2$, $t_0 = 1$.

2. $S(t) = 7t^3 - 2t^2$, $t_0 = 2$.

3. $S(t) = t^3 + 3t^2$, $t_0 = 2$.

4. $S(t) = 4t^3 + 3t^2 - 2t$, $t_0 = 1$.

5. $S(t) = 2t^3 - 5t^2$, $t_0 = 3$.

6. $S(t) = 5t^3 - 2t^2$, $t_0 = 2$.

7. $S(t) = 2t^3 + t^2$, $t_0 = 4$.

8. $S(t) = 3t^3 + 7t^2$, $t_0 = 3$.

9. $S(t) = 5t^3 + 2t^2 - 3$, $t_0 = 1$.

10. $S(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5$, $t_0 = 2$.

11. $S(t) = t^3 + 8t^2 + 1$, $t_0 = 3$.

12. $S(t) = 6t^3 + t^2 - 1$, $t_0 = 4$.

Вариант 2

Задание: Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t)$. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени t_0.

1. $S(t) = 3t^3 - t^2 + 2t$, $t_0 = 2$.

2. $S(t) = 2t^3 + 5t^2 - 3$, $t_0 = 5$.

3. $S(t) = 10t^3 + t^2 - 3$, $t_0 = 1$.

4. $S(t) = 7t^2 + 2t + 3$, $t_0 = 4$.

5. $S(t) = 2t^4 + 7t^3 - t$, $t_0 = 1$.

6. $S(t) = 5t^3 + 8t^2 + 3$, $t_0 = 2$.

7. $S(t) = 9t^2 - 3t + 5$, $t_0 = 3$.

8. $S(t) = 12t^2 + t - 1$, $t_0 = 4$.

9. $S(t) = 9t^3 + 5t^2 - t$, $t_0 = 1$.

10. $S(t) = t^3 + 5t^2 - 4$, $t_0 = 3$.

11. $S(t) = 3t^4 + 5t^2 + 1$, $t_0 = 2$.

12. $S(t) = 2t^3 + 9t^2 - 5$, $t_0 = 4$.

Контрольные вопросы:

1. Понятие производной?
2. Правила вычисления производных?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 36
Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций

Цель работы:

знать:

- систему и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

уметь:

- находить производную функции;
- находить дифференциал функции;

- дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx+b)' = k$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила вычисления производных:

$$1.\ (x \pm y)' = x' \pm y',$$

$$2.\ (xy)' = x'y + xy',$$

$$3.\ \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}.$$

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 1.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2.

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}(x-3)\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'(x-3)+\sqrt{x}(x-3)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)+\sqrt{x}\cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)+\sqrt{x}=\frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 3.

Вычислите производную функции $y=(x^2+3x+10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y=(x^2+3x+10)^2;$$
$$g(x)=x^2+3x+10;$$
$$f(x)=(g(x))^2;$$
$$f'(x)=((g(x))^2)'=2g(x)\cdot(g(x))';$$
$$y'=2(x^2+3x+10)\cdot(x^2+3x+10)'=2(x^2+3x+10)(2x+3).$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите производную функции:

1 вариант 1) $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$; 2) $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x)=\frac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	**2 вариант** 1) $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2+4x$; 2) $f(x)=(x-2)\sqrt{3x}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x)=(x^2+3)(x-4)$.
3 вариант 1) $f(x)=2x^2\sqrt{x}-4x+11+\frac{1}{x}$; 2) $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x)=\frac{e^x+1}{x}$; 4) $f(x)=\ln x(x+3)$.	**4 вариант** 1) $f(x)=3x\sqrt[3]{x}-2x+5+\frac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}(x^3-5)$; 3) $f(x)=\frac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x+3}$.
5 вариант 1) $f(x)=3x^3\sqrt{x}-2x+2+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=0{,}5(x+1)^2$; 3) $f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\frac{(x+2)(x-5)}{12}$.	**6 вариант** 1) $f(x)=\frac{3x^3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+5$; 2) $f(x)=(x^3+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\frac{x^3-3x}{x+2}$; 4) $f(x)=(x^2-1)(x+3)$.
7 вариант	**8 вариант**

1) $f(x)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{3x^2}{\sqrt{x}}+5x-1$; 2) $f(x)=(x^3-2)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2}{4x}$; 4) $f(x)=\ln x(e^x-1)$.	1) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{4}x^4-0{,}5x^2-5$; 2) $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-x)$; 3) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.
9 вариант 1) $f(x)=2x^3-4x^2-5x+3$; 2) $f(x)=(x-1)\sqrt{x+1}$;	3) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$; 4) $f(x)=(x^3-1)(x^2+1)$.

1 вариант 1) $f(x)=\sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x)=\ln\cos x$; $f'(-\pi/3)$; 3) $f(x)=\sin 2x-\cos^2 x$; $f'(0)$; 4) $f(x)=\ln tgx$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x)=e^{\sin x}$; $f'(0)$.	**2 вариант** 1) $f(x)=\cos^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x)=\ln\sin x$; $f'(\pi/6)$; 3) $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x$; $f'(0)$; 4) $f(x)=\ln ctgx$; $f'(-\pi/4)$; 5) $f(x)=e^{\cos 2x}$; $f'(\pi/4)$.
3 вариант 1) $f(x)=\ln\sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x)=\cos^2 x^2$; $f'(\sqrt{\pi}/2)$; 3) $f(x)=2\sin^2 x\cos x$; $f'(\pi/2)$; 4) $f(x)=tg^2 3x$; $f'(0)$; 5) $f(x)=e^{\sin 2x}-3e^{\cos 2x}$; $f'(0)$.	**4 вариант** 1) $f(x)=-2\sin^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x)=\ln\cos x$; $f'(\pi/3)$; 3) $f(x)=2\sin 2x+3\cos 3x$; $f'(0)$; 4) $f(x)=\ln tgx$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x)=e^{-2\sin x}$; $f'(0)$.
5 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 2x$; $f'(\pi/8)$; 2) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$; $f'(\pi/4)$; 3) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x}$; $f'(\pi/8)$; 4) $f(x)=\ln tg2x$; $f'(\pi/8)$; 5) $f(x)=e^{\cos 2x}-2e^{\sin 2x}$; $f'(\pi/4)$.	**6 вариант** 1) $f(x)=\ln tg^2 2x$; $f'(\pi/24)$; 2) $f(x)=\cos^3 x$; $f'(\pi/4)$; 3) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $f'(\pi/4)$; 4) $f(x)=e^{-\sin x}-e^{-\cos x}$; $f'(\pi/2)$; 5) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x}$; $f'(\pi/4)$.
7 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 4x$; $f'(\pi/16)$; 2) $f(x)=4\cos^2 x$; $f'(\pi/4)$; 3) $f(x)=4\sin^5 2x$; $f'(\pi/8)$; 4) $f(x)=\ln tg3x$; $f'(\pi/12)$; 5) $f(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x}$; $f'(\pi/2)$.	**8 вариант** 1) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x}$; $f'(\pi/8)$; 2) $f(x)=\cos^4 3x$; $f'(\pi/6)$; 3) $f(x)=\ln\sqrt{tg3x}$; $f'(\pi/12)$; 4) $f(x)=\arcsin 4x+e^{3x}$; $f'(0)$; 5) $f(x)=5\arccos\sqrt{x}$; $f'(1/2)$.
9 вариант 1) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x}$; $f'(-\pi/8)$; 3) $f(x)=\ln\sqrt{ctg3x}$; $f'(-\pi/12)$; 5) $f(x)=5arccos\sqrt{1-x}$; $f'(1/2)$.	2) $f(x)=\sin^4 6x$; $f'(\pi/3)$; 4) $f(x)=arctg\sqrt{x}$; $f'(1/4)$;

Контрольные вопросы:

1. Понятие производной?
2. Правила вычисления производных?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 37
Уравнение касательной в общем виде

Цель работы:

знать:

- системy и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

уметь:

- находить производную функции;
- находить дифференциал функции;

- дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:

Формула уравнения касательной к графику функции:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Задача 3 Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

► Найдем значения функции $f(x) = \cos x$ и ее производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Используя формулу (3), найдем искомое уравнение касательной: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

или $y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. ◁

Задания на закрепление:

857 Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$;
2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = -3$, $y_0 = 2$;
3) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$;
4) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$.

858 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 3$.

859 Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$;
4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 3$;
5) $f(x) = e^{\frac{3x-1}{2}}$, $x_0 = 0$;
6) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = 2$.

860 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$;
4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
6) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;
7) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;
8) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант

Задание 1. Найти производную функции.

а) $y = x^3 - 9x^2 + x - 1$ *б)* $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ в) $y = x^2 \cdot \sin x$

г) $y=\sin^2 3x$ *д)* $y=\log_3 4x$ е) $y=\dfrac{3}{5x^2}$

Задание 2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x)=x-\cos x$

Задание 3. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x)=x-3x^2$ $x_0 = 2$

2 вариант

Задание 1. Найти производную функции.

а) $y=5x^4-3x^2+5$ *б)* $y=\dfrac{x^2+1}{3x}$ в) $y=\sin(x^2-2x+4)$

г) $y=x\cdot\sin 2x$ *д)* $y=\sqrt{1+x^3}$ е) $y=(2+5x)^4$

Задание 2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x)=\ln(x+1)-2x$

Задание 3. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $x_0 = 3$.

Контрольные вопросы:

1. Понятие производной?
2. Правила вычисления производных?
3. Уравнение касательной?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки:

значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 38
Исследование функции с помощью производной

Цель: закрепить на примерах использование достаточных признаков возрастания и убывания функции, необходимого условия экстремума для нахождения соответствующих свойств функции, применение полной схемы исследования для нахождения свойств функции и построения её графика.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал.

Одним из важнейших приложений дифференцированного исчисления является исследование функции с целью построения ее графика.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в интервале $(a;b)$, если при $x_2>x_1$, $f(x_2)>f(x_1)$, и убывающей, если $f(x_2)<f(x_1)$.

Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

- если функция $f(x)$ в каждой точке интервала $]a;b[$ имеет положительную производную, то сама функция в этом интервале возрастает;
- если функция $f(x)$ в каждой точке интервала $]a;b[$ имеет отрицательную производную, то сама функция в этом интервале убывает.

Определение. Функция $f(x)$ имеет экстремум (максимум или минимум) в точке $x=x_0$, если $f(x)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двухсторонней окрестности этой точки.

Необходимое условие экстремума функции.

Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю, либо не существует.

Значения аргумента, при которых функция $f(x)$ сохраняет непрерывность, а ее производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называются стационарными точками.

Первый достаточный признак экстремума функции.

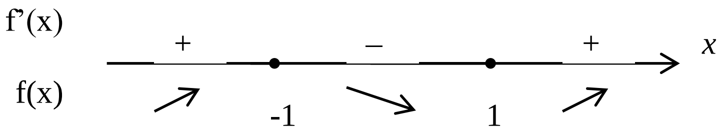
Если функция y=f(x) дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 и ее производная слева от этой точки положительная, а справа отрицательная, то в точке x_0 отрицательная, а справа – положительная, то в точке x_0 функция достигает минимума; если производная слева и справа от стационарной точки x_0 имеет одинаковый знак, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания, точек экстремума функции.

1. Найдем область определения.
2. Вычислим первую производную.
3. Найдем критические точки.
4. Выясним знак производной на промежутке.
5. Сделаем вывод.

Пример 1: $f(x)=x^3 – 3x + 2$

1. Область определения – любые числа, т.к. функция представлена в виде многочлена.
2. $f'(x)=(x^3 – 3x + 2)' = 3x^2 – 3$.
3. Чтобы найти критические точки необходимо решить уравнение $f'(x)=0$
   $3x^2 – 3 = 0$
   $x^2 = 1$
   $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$
4. Отметим эти точки на координатной прямой.



$x\in(-\infty;-1)$, $f'(-2)=3(-2)^2 – 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.
$x\in(-1;1)$, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 – 3 = -3 > 0 \Rightarrow$ функция убывает.
$x\in(1;+\infty)$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 – 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает на этом промежутке.
В точке x=-1 производная поменяла знак с плюса на минус – значит это точка максимума;
В точке x=1 производная поменяла знак с минуса на плюс – значит это точка минимума.
Ответ: функция возрастает при $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; убывает при $x\in[-1;1]$.
x=-1 – max;   x=1 – min

Пример 2. Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых *x*. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оx при $y=0$, т. е.

$$(x+1)\cdot(x-2)^2=0; \quad x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0; \quad x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оy при $x=0$, т. е. $y=(0+1)\cdot(0-2)^2=1\cdot4=4$. Т.о. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной: $y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2)$.

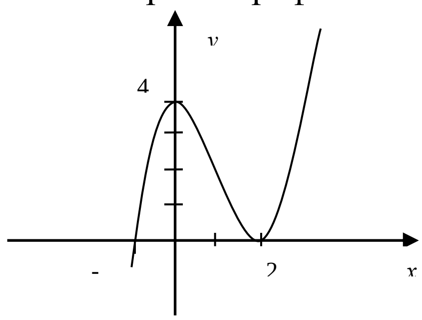
Из уравнения $y'=0$ найдем критические точки: $3x\cdot(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

	$(-\infty, 0)$	0	(0; 2)	2	$(2; +\infty)$
	+	0	–	0	+
	↗	4	↘	0	↗
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x=0 и минимум при x=2: $y_{max}=y(0)=4$; $y_{min}=y(2)=0$.

4) По полученным точкам строим график:



Задания для выполнения самостоятельной работы:

1.Исследовать функцию на возрастание и убывание, точки экстремума

а) $f(x)=2x^6-5x^4$

б) $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$

в) $f(x)=(x-2)^4$

2.Исследовать функцию по полной схеме и построить ее график

а) $f(x)=x^2-4x+3$

б) $f(x)=12x-x^3$

Контрольные вопросы:

1. Понятие производной?
2. Правила вычисления производных?
3. Уравнение касательной?

4. Понятие функция?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 39 Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции

Цель: Уметь находить наибольшее, наименьшее значения и экстремальных значений функции»

Вариант 1

Задание 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

1. $y = x^4 + 4x$, $[-2;1]$. **2.** $y = 2x^2 - 4x^3$, $[-1;2]$.

3. $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x$, $[0;2]$. **4.** $y = \frac{x^4}{2} - x^2$, $[-2;1]$.

5. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x$, $[-1;3]$.

6. $y=3x-x^3$, $[-2;2]$.

7. $y=x^4-2x^2+1$, $[-2;2]$.

8. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$, $[-2;3]$.

9. $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$, $[0;2]$.

10. $y=x^3-3x$, $[-2;2]$.

Задание 2. Найдите интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции.

1. $y=x^4-4x^3$.

2. $y=x^3+3x^2-4$.

3. $y=-x^3+3x^2-4$.

4. $y=-x^4+2x^2$.

5. $y=-x^3+3x+1$.

6. $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x$.

7. $y=x^3+3x^2$.

8. $y=x^4-32x$.

9. $y=4x^3-2x^2$.

10. $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x$.

Вариант 2

Задание 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

1. $y=x^4-4x^3$, $[-1;4]$.

2. $y=x^3+3x^2-4$, $[-3;1]$.

3. $y=-x^3+3x^2-4$, $[-1;3]$.

4. $y=-x^4+2x^2$, $[-2;2]$.

5. $y=-x^3+3x+1$, $[-2;2]$.

6. $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x$, $[0;2]$.

7. $y=x^3+3x^2$, $[-3;1]$.

8. $y=x^4-32x$, $[0;3]$.

9. $y=4x^3-2x^2$, $[-1;1]$.

10. $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x$, $[-1;2]$.

Задание 2. Найдите интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции.

1. $y=4x^3-x^4$.

2. $y=4x-x^4$.

3. $y=x^3-5x^2+8x-4$.

4. $y=x^3-\frac{3x^2}{2}$.

5. $y=-x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{2}$.

6. $y=3x-x^3$.

7. $y=x^4-2x^2+1$.

8. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$.

9. $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$.

10. $y=x^3-3x+5$.

Контрольные вопросы:

1. Наибольшее и наименьшее значение функции?
2. Интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 2 № 305

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 40
Контрольная работа по теме: “Начала математического анализа”

Вариант 1

1. Найдите стационарные точки функции $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы

функции

3. Докажите, что функция $f(x) = 4x — 3 \sin x$ возрастает на всей числовой прямой.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = 2\ \ - 9x + 10$ на отрезке [-2; 4].

5. Исследуйте функцию $f(x) = \ 2x+ 5$ и постройте ее график.

Вариант 2

1. Найдите стационарные точки функции $f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы

функции

3. Докажите, что функция $f(x) = 5 \cos x - 7x$ убывает на всей числовой прямой.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \ 2+ 15x + 1$ на отрезке [-2; 6].

5. Исследуйте функцию $f(x) = 7+ 9x$ и постройте ее график.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 9

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала,

руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 41

Интеграл и первообразная

Цель:

1. Формировать умения и навыки вычисления интегралов.
2. Формировать умения и навыки самостоятельного умственного труда
3. Прививать умения и навыки работы со справочным материалом
4. Определить уровень знаний студентов по данной теме

Теореия

Из дифференциального исчисления известно, что есть целый ряд функций, отличающихся постоянным числом, которые имеют одну и ту же производную или один и тот же дифференциал.

Например, функции x^3, x^3+5, x^3-3, x^3+12, x^3+a и т.д. имеют производную одну и ту же $3x^2$ и один и тот же дифференциал: $dy=3x^2\cdot dx$. Для функции $3x^2$, функции: x^3, x^3+5, x^3-3, x^3+12, x^3+a и т.д. являются первообразными.

Первообразной функцией по отношению к данной функции $y=f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная от которой равна данной функции, т.е. $F'(x)=f(x)$

Таким образом, можно найти любую непрерывную функцию $f(x)$, для которой существует бесчисленное множество первообразных $F(x)+C$, отличающихся постоянным числом C.

Совокупность первообразных функций $F(x)+C$ для данной функции $f(x)$ или для данного дифференциала $f(x)\cdot dx$, называется *неопределенным интегралом* и обозначается. Согласно определению

$$\int f(x)\cdot dx = F(x)+C$$

где, $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)\cdot dx$ – подынтегральное выражение; $F(x)$ – первообразная для подынтегральной функции; C – постоянная интегрирования, показывающая, что для подынтегральной функции существует бесчисленное множество первообразных; x – переменная интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left[\int f(x)\cdot dx\right]' = f(x)$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x)\cdot dx = a\int f(x)\cdot dx, \text{ где } a = const.$$

3. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)\cdot dx = f(x)\cdot dx$$

4. Неопределенный интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной:

$$\int d[F(x)+C] = \int f(x)dx = F(x)+C$$

5. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\cdot dx = \int f_1(x)\cdot dx + \int f_2(x)\cdot dx$$

При нахождении неопределенного интеграла пользуются перечисленными выше свойствами неопределенного интеграла и табличными интегралами (формулами интегрирования).

Основные формулы интегрирования

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ где $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

Методы интегрирования

Выделяют три основных метода решения задач на нахождение интегралов: метод непосредственного интегрирования, метод постановки или метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Метод непосредственного интегрирования.

Этот метод основан на применении свойств неопределенного интеграла, тождественных преобразований подынтегральной функции с целью сведения заданного интеграла к табличному виду и формул интегрирования.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{\sin(2x)}{\cos x} \cdot dx$

Решение: в данном интеграле следует применить тригонометрическое тождество, вынести постоянный множитель за знак интеграла и применить формулу интегрирования:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} \cdot dx = 2\int \sin x dx = 2(-\cos x) + C = -2\cos x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

Решение: в данном интеграле удобно записать кубический и квадратный корни в виде степени и взять интеграл от степенной функции (по таблице).

$$\int \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{\frac{13}{6}} \cdot dx = \frac{6x^{\frac{19}{6}}}{19} + C = \frac{6}{19}\sqrt[6]{x^{19}} + C$$

Решение типового варианта:

1. $\int \frac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx;$

Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель и использовав 2-е и 3-е правила интегрирования, а также таблицу основных неопр. интегралов, получим

$$\int \frac{3 - 2x^2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2}} dx = 3\int x^{-1/4} dx - 2\int x^{15/4} dx + \int x^{5/12} dx = 4x^{3/4} - \frac{8}{19} x^{19/4} + \frac{12}{17} x^{17/12} + c = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + c;$$

проверим полученный результат:

$$(4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C)' = 4 \cdot \frac{3}{4}x^{-1/4} - \frac{8}{19} \cdot \frac{19}{4}x^{15/4} + \frac{12}{17} \cdot \frac{17}{12}x^{5/12} = 3x^{-1/4} - 2x^{15/4} + x^{5/12}$$

2.

$$\int \frac{1dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} dx = \int (4-8x)^{-2/5}(-8) = (4-8x)^{-2/5} dx = -\frac{5}{8*3}(4-8x)^{3/5} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C$$

выполним проверку результата:

$$(-\frac{5}{24}(4-8x)^{3/5} + C)' = -\frac{5}{24} \cdot \frac{3}{5}(4-8x)^{-2/5}(-8) = (4-8x)^{-2/5}$$

3. $\int \frac{dx}{6-7x} dx;$ $\quad \int \frac{dx}{6-7x} dx = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C;$

проверим полученный результат:

$(-\frac{1}{7}\ln|6-7x|+C)' = -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6-7x}\cdot(-7) = \frac{1}{6-7x}$

4. $\int\cos(2-5x)dx$; $\quad \int\cos(2-5x)dx = -\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C$

выполним проверку результата: $\quad (-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C)' = -\frac{1}{5}\cos(2-5x)\cdot(-5) = \cos(2-5x)$

5. $\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}dx$; $\quad \int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2-(\sqrt{3})^2}}dx = \frac{3}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+C$

проверим полученный результат:

$$(\frac{3}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+C)' = (\frac{3}{2}\cdot\frac{2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}}{2x+\sqrt{4x^2-3}}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2(\sqrt{4x^2-3}+2x)}{(2x+\sqrt{4x^2-3}\sqrt{4x^2-3})} = \frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}$$

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}dx$;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}x)}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}}+C$$

7.Например, при разложении подынтегральной функции на алгебраическую сумму функций, получим интеграл, который может быть найден по таблице интегралов.

Пример.

$$\int\frac{x^5+2x^3-\sqrt{x}+3}{3x}dx = \int\frac{x^5}{3x}dx+\int\frac{2x^3}{3x}dx-\int\frac{\sqrt{x}}{3x}dx+\int\frac{3}{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int x^4dx+\frac{2}{3}\int x^2dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x} = \frac{x^5}{15}+\frac{2x^3}{9}-\frac{2\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{3}\ln|x|+C$$

Упражнения для самостоятельного решения

Задание №1

1.1 $\int\frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$ 1.2 $\int\frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$ 1.3 $\int\frac{3xdx}{4x^2+1}$ 1.4 $\int\frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$ 1.5 $\int\frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$

1.6 $\int\frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$ 1.7 $\int\frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$ 1.8 $\int\frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$ 1.9 $\int\frac{2xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$ 1.10 $\int\frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$

1.11 $\int\frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$ 1.12 $\int\frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$ 1.13 $\int\frac{3xdx}{4x^2+1}$

Задание №2

2.1 $\int e^{2x-7}dx$ 2.2 $\int e^{2+5x}dx$ 2.3 $\int e^{2-3x}dx$ 2.4 $\int e^{2x+1}dx$ 2.5 $\int e^{7x-2}dx$

2.6 $\int e^{5x-7}dx$ 2.7 $\int e^{5x+7}dx$ 2.8 $\int e^{7-2x}dx$ 2.9 $\int e^{3-4x}dx$ 2.10 $\int e^{10x+2}dx$

2.11 $\int e^{2x-7}dx$ 2.12 $\int e^{2+5x}dx$ 2.13 $\int e^{2-3x}dx$

Задание №3

3.1 $\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$ 3.2 $\int\frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}$ 3.3 $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$

3.4 $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$ 3.5 $\int\frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx$ 3.6 $\int\frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$ 3.7 $\int\frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$

3.8 $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ 3.9 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$ 3.10 $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$

3.11 $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$ 3.12 $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}$ 3.13 $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$

Задание №4

4.1 $\int \sin^4 2x\cos 2xdx$ 4.2 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx$ 4.3 $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx$ 4.4 $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$

4.5 $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$ 4.6 $\int \cos^7 2x\sin 2xdx$ 4.7 $\int \frac{\cos xdx}{\sin x+1}$ 4.9 $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos x+3}}$

4.10 $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos x+1}}$ 4.11 $\int \sin^4 2x\cos 2xdx$ 4.12 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx$ 4.13 $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx$

Задание №5

5.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$ 5.2 $\int \frac{dx}{2x^2-5}$ 5.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$ 5.4 $\int \frac{dx}{3x^2-5}$ 5.5 $\int \frac{dx}{5x^2-4}$

5.6 $\int \frac{dx}{6x^2-7}$ 5.7 $\int \frac{dx}{6x^2+1}$ 5.8 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ 5.9 $\int e^{4x+5}dx$ 5.10 $\int e^{6x-4}dx$

5.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$ 5.12 $\int \frac{dx}{2x^2-5}$ 5.13 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$

Задание №6

6.1 $\int \sin(7x+1)dx$ 6.2 $\int \cos(8x-4)dx$ 6.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$ 6.4 $\int \frac{dx}{3x^2+2}$

6.5 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ 6.6 $\int \frac{dx}{8x^2-9}$ 6.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$ 6.8 $\int \cos(3x-7)dx$

6.9 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$ 6.10 $\int \frac{dx}{2x+9}$ 6.1 $\int \sin(7x+1)dx$ 6.2 $\int \cos(8x-4)dx$ 6.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$

Задание №7

7.1. $\int \frac{x^2\cos x+x^2}{x^2}dx$ 7.2. $\int \frac{x^2+5x}{x}dx$

7.3. $\int (3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}-\frac{1}{x\sqrt{x}})dx$ 7.4. $\int (2x-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}+5\sqrt[4]{x})dx$

7.5. $\int (3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{6}{x\sqrt[3]{x^5}}+11\sqrt[6]{x^5})dx$ 7.6. $\int (5x^4-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}+9\sqrt[7]{x^2})dx$

7.7. $\int (6x^5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}-8\sqrt[5]{x^3})dx$ 7.8. $\int (7x^6-\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2\sqrt{x}}+3\sqrt{x})dx$

7.9 $\int (4x-\frac{2}{x^3}+9\sqrt[7]{x^2}-\frac{6}{x\sqrt[5]{x}})dx$ 7.10 $\int (8x^7+\frac{7}{x^8}-\frac{8}{x\sqrt[3]{x}}+5\sqrt[4]{x})dx$

7.11. $\int \frac{x^2\cos x+x^2}{x^2}dx$ 7.12. $\int \frac{x^2+5x}{x}dx$

7.13. $\int (3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}-\frac{1}{x\sqrt{x}})dx$

Контрольные вопросы:

1. Понятия интеграл?
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 10.№10

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 42

Теорема Ньютона—Лейбница

Цель: формировать умение по применению методов интегрального исчисления при вычислении функций с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

Задачи:

1. Научиться вычислять определенный интеграл $\int\limits_b^a f(x)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.
2. Уметь применить формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определенного интеграла.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.

Определение. Если существует конечный передел интегральной суммы (8)

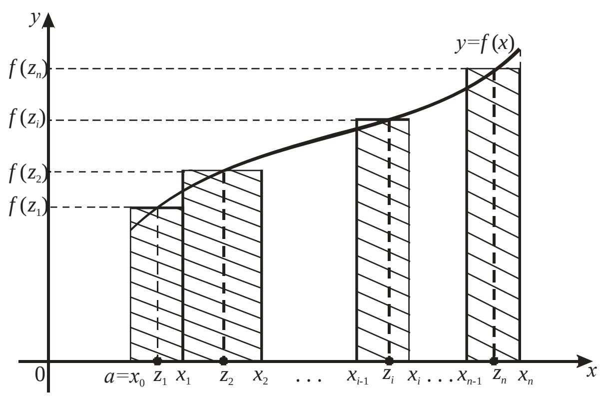
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \text{ - (8)}$$

при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения τ_n отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора промежуточных точек ξ_k, то этот предел называют определенным интегралом (или интегралом Римана) от функции f(x) на отрезке [a; b] и обозначают: $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Если указанный предел существует, то функция f(x) называется интегрируемой на отрезке [a; b] (или интегрируемой по Риману). При этом f(x)dx называется подынтегральным выражением, f(x) – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, в случае, когда диаметр разбиения λ стремится к нулю.

Геометрический смысл определенного интеграла. Пусть функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и f(x) ≥ 0. Фигура, ограниченная графиком AB функции y=f(x), прямыми x=a, x=b и осью Ox (рис. 1), называется криволинейной трапецией.



Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(\xi_k)$, а сумма $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры (изображенной на рис. 1). Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора точек ξ_k.

Чем меньше Δx_k, k=1, n, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы при λ→0:

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

2. Основные свойства определенного интеграла.

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны (a=b), то интеграл равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Это свойство следует из определения интеграла.

2. Если f(x)=1, то $\int_a^b dx = b - a.$

Действительно, так как f(x)=1, то $\int dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b - a.$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на [a; b] функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

6 (аддитивность определенного интеграла). Если существует интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx,$ то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для любых чисел a, b, c; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

7. Если f(x) ≥ 0 $\forall x \in$[a; b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0,$ a < b.

8 (определенность определенного интеграла). Если интегрируемые функции f(x) и φ(x) удовлетворяют неравенству f(x) ≥ φ(x) $\forall x \in$[a; b], то

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx,$ a >b.

9 (об оценке определенного интеграла). Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b], то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a),$ a < b.

10 (теорема о среднем). Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то существует такая точка $\xi \in$[a; b], что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$

т. е. определенный интеграл от переменной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования [a; b] и длины b-a этого отрезка.

3. Теорема о среднем.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то существует такая точка $\xi \in$[a; b], что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$

т. е. определенный интеграл от переменной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования [a; b] и длины b-a этого отрезка.

4. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если оставить постоянным нижний предел интегрирования a, а верхний x изменять так, чтобы x є [a; b], то величина интеграла будет изменяться. Интеграл вида: $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x),$ x є [a; b],

называется определенным интегралом с переменным верхним пределом и является функцией верхнего предела x. Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

Теорема. Производная определенного интеграла от непрерывной функции f(x) по его переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела: $\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'x = f(x).$

Формула Ньютона-Лейбница. Формула Ньютона-Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: значение определенного интеграла на отрезке [a; b] от непрерывной функции f(x) равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при x=b и x=a.

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$ - (9)

Примеры. Вычислить интегралы

1. $\int\limits_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0.$

2. $\int\limits_1^3 \left(x^2 - 4x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$

3. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$

Задания для практического занятия:

Задание: Вычислить определенный интеграл, методом непосредственного интегрирования используя формулу Ньютона-Лейбница.

1. $a)\int\limits_1^2 \left(3x^2 - 2x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_{\Pi}^{2\Pi} \frac{\cos x}{6}dx$

2. $a)\int\limits_{-2}^1 \left(x^2 - x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_{-\Pi/6}^{\Pi/6} \frac{6dx}{cos^2 2x}$

3. $a)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x dx$ $\quad b)\int\limits_0^2 (1 - \frac{x}{2})^4 dx$

4. $a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x}dx$ $\quad b)\int\limits_{-1}^4 (1 + \frac{x}{2})^8 dx$

5. $a)\int\limits_1^2 \left(4x^3 + 2x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_0^{\Pi} \frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2} - \frac{\Pi}{3})}$

11. $a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 \frac{1}{2}x}dx$ $\quad b)\int\limits_2^3 (1 - x)^4 dx$

12. $a)\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\frac{1}{3}x dx$ $\quad b)\int\limits_{-1}^4 (1 + \frac{x}{2})^8 dx$

13. $a)\int\limits_2^3 \left(3x^2 - 2x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_{-\Pi/2}^{\Pi/2} 3\sin x dx$

14. $a)\int\limits_0^{\pi} \left(3\sin\frac{1}{2}x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_1^0 (1 - 2x)^4 dx$

15. $a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(36\cos 2x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_{-2}^3 \frac{2dx}{(3 - x^2)}dx$

21. $a)\int\limits_1^2 \left(4x^3 - 3x^2\right)dx$ $\quad b)\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x + 3}}$

22. $a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{9}} \left(2\cos 3x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_0^2 (1 - \frac{x}{2})^4 dx$

23. $a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \left(108\sin 6x\right)dx$ $\quad b)\int\limits_{-1}^1 (7 - 5x)dx$

24. $a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{4}{\cos^2 2x}dx$ $\quad b)\int\limits_{-2}^1 (4x^3 + 6x)dx$

25. $a)\int\limits_1^2 \left(5x^4 - 6x^2\right)dx$ $\quad b)\int_1^9 \sqrt{8x - 5}dx$

Контрольные вопросы:

1. Что называют определенным интегралом функции f(x)?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Запишите свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 10 №59

Интернет-ресурсы:

1**.** Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 43
Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Цель: закрепить умение применять определенный интеграл для решения физических задач, развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал.

Таблица интегралов.

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, при $n \neq -1$; 2) $\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u\sqrt{u} + C$;

3) $\int du = u + C$; 4) $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$; 5) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;

6) $\int \cos u\, du = \sin u + C$; 7) $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;

8) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$; 9) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

10) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$; 11) $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$;

12) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; 13) $\int e^u du = e^u + C$; 14) $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит **формула Ньютона – Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Определенный интеграл используется в физике и технике для решения различных задач.

Пример 1. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

Решение. По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т.е. F=kx, где x- величина растяжения или сжатия (в м), k-постоянная. Из условия задачи находим $k=\frac{F}{x}=\frac{10}{0{,}01}=1000$, следовательно, $F(x)= kx=1000x$.

Работа силы F(x) при перемещении тела из точки *а* в точку *в* равна $A=\int_a^в F(x)dx$.

Используя данные задачи , получаем $A=\int_0^{0{,}08} 1000x dx.=1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}08}=$

$=500((0{,}08)^2-0)=3{,}2$ (Дж)

Пример 2. Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону $\rho(l)=16\,l+24$ (плотность измеряется в кг/м). Найдите массу стержня, если его длина равна 20см.

Решение. Исходя из физического смысла определенного интеграла, массу стержня можно вычислить по формуле: $m=\int_a^в \rho(l)dl$. В нашем случае

$m=\int_0^{0{,}02}(16l+24)dl= (8\,l^2+24\,l)\big|_0^{0{,}02}=8*0{,}02^2+24*0{,}02-0=0{,}4832$ (кг.)

Пример 3. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

◀ Так как путь, пройденный телом со скоростью υ(t) за отрезок времени [t_1,t_2], выражается интегралом

$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)dy,$ то имеем: $S=\int\limits_{0}^{5}(2t+3t^2)dt=(t^2+t^3)\Big|_0^5=150$ (м).

Задания для самостоятельного решения:

1.Найдите расстояние, пройденное материальной точкой за 2 с. от начала движения, если скорость задана формулой v(t)=$2t^3$- $4t^2$+2 .

2.Точка движется вдоль прямой со скоростью v(t)=2+$\frac{1}{\sqrt{t+2}}$.. Найдите путь пройденный точкой в промежуток времени $[2;7]$

3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением v=24t- $6t^2$, м/с. Вычислить: путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 6 см, если для растяжения ее на 1см нужно приложить силу в 10 Н.

5. Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону $\rho(l)=8l+1$ (плотность измеряется в кг/м). Найдите массу стержня, если его длина равна 50см.

Контрольные вопросы:

1. Что называют определенным интегралом функции f(x)?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Запишите свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 10 №59

Интернет-ресурсы:

1**.** Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.
Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки.

Практическое занятие № 44
Вычисление вероятностей

Цель: закрепить умения вычислять вероятности событий, решая прикладные задачи.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий).
Случайным событием (или просто событием) называется всякое явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий.

Классическое определение вероятности

Вероятностью P(A) события называется отношение m числа исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу n возможных исходов опыта:P (A) = $\frac{m}{n}$

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины. События $X = x_i$, (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Пример 1. Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение: искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1)=47/50=0{,}94;\ P(x_2)=2/50=0{,}04;\ P(x_3)=1/50=0{,}02.$$

Тогда закон распределения случайной величины имеет вид:

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3$=0,94+0,04+0,02=1.

Статистика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых статистических (количественных, качественных) данных. Всю совокупность объектов, подлежащих изучению, называют **генеральной совокупностью**. Та часть объектов, которая попала на проверку, исследование и т.п., называется выборочной совокупностью или просто **выборкой**. Выборки характеризуются центральными тенденциями: **средним значением, модой и медианой**. Средним значением выборки называют среднее арифметическое всех её значений.

Среднеарифметическим значением вариационного ряда называется результат деления суммы значений статистической переменной на число этих значений, то есть на число слагаемых.

Мода выборки – те её значения, которые встречаются чаще всего. Медиана выборки – это число, “разделяющее” пополам упорядоченную совокупность всех значений выборки.

Задача

Дана выборка: 1,3; 1,8; 1,2; 3,0; 2,1; 5; 2,4; 1,2; 3,2;1,2; 4; 2,4.

Это ряд вариантов. Расположив эти варианты в возрастающем порядке, мы получим вариационный ряд: 1,2; 1,2; 1,2; 1,3; 1,8; 2,1; 2,4; 2,4; 3,0; 3,2; 4; 5.

Среднеарифметическое значение этого ряда равно

$$\frac{1{,}2*3+1{,}3+1{,}8+2{,}1+2{,}4*2+3{,}0+3{,}2+4+5}{12}=2{,}4.$$

Медиана ряда -2,4

Мода ряда –1,2.

Медианой вариационного ряда называется то значение случайной величины, которое приходится на средину вариационного ряда (Ме).

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Модой вариационного ряда называют вариант (значение случайной величины), которому соответствует наибольшая частота (Мо), т.е. которая встречается чаще других.

Размахом ряда называется разность между $R= x_{max} - x_{min}$, т.е. наибольшим и наименьшим значениями этих вариантов. Составим таблицу

x_i	1,2	1,3	1,8	2,1	2,4	3,0	3,2	4	5
n_i	3	1	1	1	2	1	1	1	1
$n_{i/n}$	3/12=1/4	1/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Такие таблицы называют частотными. В них числа второй строки – частоты; они показывают, как часто встречаются в выборке те или другие её значения. В третьей строке стоят относительные частоты.

Относительной частотой значений выборки называют отношение её частоты к числу всех значений выборки.

Найдём размах ряда: R=5-1,2=3,8; Размах ряда равен 3,8.

В статистике широкое применение находят такие характеристики, как мода и медиана.

Мода является наиболее приемлемым показателем при выявлении расфасовки некоторого товара, которой отдают предпочтение покупатели; цены на товар данного вида, распространённый на рынке; как размер обуви, одежды, пользующийся наибольшим спросом; вид спорта, которым предпочитают заниматься большинство населения страны, города, посёлка школы и т.д.

Задания для самостоятельной работы

I вариант

1.В ящике из 1000 деталей имеются 20 бракованных. Вынимают наугад 1деталь. Чему равна вероятность того, что деталь небракованная?

2.На отдельно взятых карточках написаны буквы ***ц, о, н, а, к, е.*** Карточки перемешали. После перемешивания берут карточки по одной и кладут рядом. Какова вероятность получить слово «***оценка***»?

3. Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального тетраэдра при одном подбрасывании.

4. Найти моду выборки 4, 15, 6, 7, 3, 6,8

5. Найти медиану и среднее значение выборки, размах ряда, предварительно составив таблицу с частотами появления варианты 17,12, 12, 34, 18, 5, 17, 12, 18, 15

Контрольные вопросы:

1. Понятие медианы?
2. Понятие моды?
3. Понятие среднее арифметическое?
4. Понятие размах?
5. Понятие статистика?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 10 №59

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № № 45
Прикладные задачи. Представление числовых данных.

Цель: Отработка навыков решения практических задач с применением вероятностных методов.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотреть теоретический материал и примеры по указанной теме.
   Решить задания, указанные в практической части.

Теоретическая часть

Меры центральной тенденции (measures of central tendency) — способы осмысления центральной или средней позиции множества наблюдений, оценок, группы чисел и т.д.

Мода – это наиболее часто встречающееся значение признака.

Необходимо подчеркнуть, что мода представляет собой наиболее частое значение признака, а не частоту этого значения.

Пример 1. Рассмотрим случай точечного распределения. В совокупности оценок успеваемости 2,3,4,4,4,5,5 модой является оценка 4 Мо=4, потому, что эта оценка встречается чаще других. Принято считать, что в случае, когда все значения оценок встречаются одинаково часто, совокупность данных моды не имеет. Например, в совокупности 3,3,3,4,4,4,5,5,5 моды нет.

Если две несмежные оценки в совокупности имеют равные частоты, и они больше частот других оценок, то существуют две моды. В примере совокупности 2, 3, 3, 4, 5, 5 модами являются оценки 3 и 5 – $Mo_1=3$, $Mo_2=5$. В этом случае говорят, что совокупность оценок является *бимодальной.*

Медианой Ме называется значение признака, относительно которого генеральная совокупность делится на две равные по объему части, причем в одной из них содержатся члены, у которых значение признака не превосходит Ме Х, а в другой - не меньше Ме Х.

Если ряд включает в себя четное количество признаков, то медианой (Ме) будет среднее, взятое как полусумма двух центральных значений ряда.

Пример 2. Найдем медиану выборки: 5, 4, 5, 6, 7, 3, 6, 2, 8, 6, 9, 7.

Упорядочим выборку: 2, 3, 4, 5, 5, 6, / 6, 6, 7, 7, 8, 9. Поскольку здесь имеется четное число элементов, то существует две «середины» - 6 и 6. В этом случае медиана определяется как среднее арифметическое этих значений Ме=(6+6)/2=6.

Найдем медиану выборки с нечетным количеством значений: 9, 3, 5, 8, 4, 11, 13.

Сначала упорядочим выборку по величинам входящих в нее значений. Получим: 3, 4, 5, 8, 9, 11, 13. Поскольку в выборке семь элементов, четвертый по порядку элемент будет серединой ряда. Таким образом, медианой будет четвертый элемент – 8.

Среднее арифметическое значение, или просто *среднее* ($\bar{x}$), равно сумме переменных, деленной на их число.

Для несгруппированных переменных среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i.$$

Размахом выборки называется величина $R = X_{(n)} - X_{(1)}$

Иными словами, размах - это расстояние между максимальным и минимальным членом вариационного ряда.

Дисперсия. Один из способов измерения рассеяния данных заключается в том, чтобы определить степень отклонения каждого наблюдения от средней арифметической. Очевидно, что чем больше отклонение, тем больше изменчивостьнаблюдений.

Однако мы не можем использовать среднее этих отклонений как меру рассеяния, потому что положительные отклонения компенсируют отрицательные отклонения (их сумма равна нулю). Чтобы решить эту проблему, мы возводим в квадрат каждое отклонение и находим среднее возведенных в квадрат отклонений; эта величина называется **дисперсией**.

Возьмем n наблюдений x_1, x_2, x_3, ..., x_n, среднее которых равняется $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$. Вычисляем дисперсию:

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Среднеквадратическое отклонение — это положительный квадратный корень из дисперсии.

Мы можем представить себе стандартное отклонение как своего рода среднее отклонение наблюдений от среднего. Оно вычисляется в тех же единицах (размерностях), что и исходные данные.

Пусть X – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1 = P\{X = x_1\}$, $p_2 = P\{X = x_2\}$, …

тогда **математическое ожидание** дискретной случайной величины M(X) определяется как сумма: $\sum x_i p_i$.

Пример 3. Найти размах, моду, медиану, среднее выборки значений случайной величины X, построить полигон частот.

X	-2	-1	0	1	3
M	1	3	2	4	1

Распишем ряд выборки: -2, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 3.
Мо=1 (наибольшая частота – у 1), Ме=0 (срединное значение в ряду признака).
R=3-(-2)=5.

$$\overline{X} = \frac{-2 - 1 - 1 - 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3}{11} = \frac{2}{11}$$

Пример 4. Найти дисперсию выборки 10см, 12см, 7см, 11см и среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки.

$$\overline{X} = \frac{10 + 12 + 7 + 11}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$D = \frac{(10 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (7 - 10)^2 + (11 - 10)^2}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5см^2$$

$$\sigma(\mathrm{x}) = \sqrt{D(\mathrm{x})} = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87 \text{ см}$$

Практическая часть

Задание 1. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:
1) -1, 12, -6, -7, 13, -2, 10, -2, -9
2) 4, -10, 13, 8, -6, -3, -1, 13, -6

Задание 2. Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X. Построить полигон частот.

X	-3	-1	0	5
M	2	3	5	2

Задание 3. Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

X	-3	-1	0	5
M	2/7	3/7	1/7	1/7

Задание 4. Найти дисперсию выборки:
1) 16г, 14г, 13г, 17г
2) 5м, 13м, 8м, 12м, 12м

Задание 5. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки

12м, 10м, 7м 17м, 9м

Задание 6. Сравнить по стабильности двух футболистов, если число голов, забитых каждым из игроков, приведено в таблице:

№	1	2	3	4	5	6

сезона						
1 игрок	17	21	20	16	15	19
2 игрок	-	17	20	18	21	14

Контрольные вопросы:

1. Понятие медианы?
2. Понятие моды?
3. Понятие среднее арифметическое?
4. Понятие размах?
5. Понятие статистика?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 12

Интернет-ресурсы:

1**.** Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 46
Корни уравнений. Равносильность уравнений

Цели:

а) образовательные – конкретизировать знания обучающихся по теме «Равносильность уравнений», обобщить и закрепить знания по теме «Уравнения и неравенства», выявить пробелы в знаниях обучающихся по указанным темам.

в) развивающие – развивать способность четко формулировать свои мысли, мышление (умение анализировать, выделять главное, сравнивать, строить аналогии, обобщать и систематизировать, доказывать и опровергать, объяснять и определять понятия, ставить и решать проблемы); логику (на основе усвоения учащимися причинно-следственных связей, сравнительного анализа).

Теория:

Уравнением с одной переменной x называется выражение

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

содержащее переменную величину x и знак равенства.

Среди видов уравнений различают **алгебраические, параметрические, трансцендентные, функциональные, дифференциальные и другие** виды уравнений.

К алгебраическим уравнениям относятся:

- линейное уравнение $ax + b = 0$.
- квадратное уравнение - $ax^2 + bx + c = 0$.
- кубическое уравнение - $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- уравнения четвертой степени - $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.
  $ax^4 + bx^2 + c = 0$. (биквадратное)

Число *a* называется *корнем* (или *решением*) уравнения (1), если при подстановке этого числа в уравнение получается верное числовое равенство.

Важно понимать, что решение – это **ЧИСЛО**, например, 15 или $\sqrt{2}$ поэтому ответ при решении уравнения должен содержать именно числа, а не выражения, уравнения и т. п.

***Решить* уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.**

Уравнения $f(x)=g(x)$ и $f_1(x)=g_1(x)$ называются *равносильными*, если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения и наоборот, или если оба эти уравнения не имеют решений.

Решение уравнения (как действия) *– это процесс, состоящий в основном в замене заданного уравнения другим уравнением, ему равносильным*. Такая замена называется ***тождественным преобразованием***.

Основные тождественные преобразования следующие:

1) ***Замена одного выражения другим, тождественно равным ему.***

Например, уравнение $(3x+2)^2=15x+10$ можно заменить следующим равносильным: $9x^2+12x +4 = 15x +10$.

2) ***Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с обратными знаками.***

Так, в предыдущем уравнении мы можем перенести все его члены из правой части в левую со знаком « – »: $9x^2+12x+4–15x–10 = 0$,

Ребята, как называется операция упрощения слагаемых? (приведение подобных)

Приведя подобные, получим: $9x^2–3x –6 = 0$.

3) Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение (число), отличное от нуля.

Предыдущее уравнение разделим на 3, получим: $3x^2 - x - 2 = 0$

Как называется это уравнение и как его решить? (квадратное, решается -через дискриминант

D=b²-4ac

Если D>0, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *- два действительных корня.*

Если D=0, то $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$ *- один корень или два совпадающих.*

Если D<O, то действительных корней нет, (на самом деле мы знаем что корни у данного уравнения есть, но они принадлежат множеству комплексных чисел).

- или с помощью теоремы Виета

Если старший коэффициент равен 1, то квадратное уравнение называется приведенным $x^2+bx+c=0$

$$\begin{cases} x1x2 = q \\ x1 + x2 = -p \end{cases}$$

Очень важно, чтобы *выражение, на которое мы умножаем/делим было отлично от нуля, в противном случае новое уравнение может не быть равносильным предыдущему, а это влечет приобретение посторонних корней или наоборот, потери корня.*

4) Возведение обеих частей уравнения в нечётную степень **или** ***извлечение из обеих частей уравнения корня нечётной степени.***

Необходимо помнить, что:

а) возведение в *чётную степень* может привести *к приобретению посторонних корней*;

б) *неправильное* извлечение *корня чётной степени* может привести к *потере корней*.

Например, уравнение $7x = 35$ имеет единственный корень $x = 5$.Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение:

$49x^2 = 1225$ имеющее два корня: x=5 и $x = –5$. Последнее значение является посторонним корнем.

Неправильное извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения $49x^2 = 1225$ даёт в результате $7x = 35$, и мы теряем корень $x = – 5$.

Правильное извлечение квадратного корня приводит к уравнению: $| 7x| = 35$, а следовательно, к двум случаям:

1) $7x= 35$, тогда x =5; 2) $–7x= 35$, тогда $x = – 5$.

Из этих четырёх правил следует, что с помощью стандартных приёмов и методов решения уравнений, а именно:

- **преобразования (раскрытие скобок, освобождение от знаменателя, приведение подобных членов, возведение уравнения в нечетную натуральную степень и т. д.),**
- **разложения на множители (формально этот приём относится к преобразованиям, но, так как он довольно часто встречается самостоятельно, мы его выделяем особо),**
- **введения вспомогательных неизвестных,**

уравнение (1) может быть сведено к более простому и, самое главное, равносильному уравнению $f_1(x)=g_1(x)$.

7. Закрепление изученного материала

Для каждой пары уравнений выясните, является ли одно из них следствием другого. Предлагается форма ответа: (да, да), (да, нет) и т. п. Например, ответ (нет, да) означает, что второе уравнение не является следствием первого, а первое является следствием второго:

1) $2x-4=0$ и $x^2-x-2=0$;
2) $x^2+4x+4=0$ и $x+2=0$;
3) $x^2+x-2=0$ и $x^2+2x-3=0$;
4) $x^2=1$ и $\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}$;
7) $x^2-x=1$ и $(x^2-x)^2=1$;
8) $x^2-x+5=4$ и $(x^2-x+5)^2=16$;
9) $(x+1)(x-3)^2=0$ и $(x+1)^2(x-3)=0$;
10) $\sqrt{(x+1)^2}=1$ и $x=0$;
11) $x^2=\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x^2}=x+1$;
12) $(x+3)(x-2)=1$ и $\lg(x+3)(x-2)=0$;
13) $(x+3)(x-2)=1$ и $\lg(x+3)+\lg(x-2)=0$;
14) $(x-1)(4x^5-1)=x-1$ и $4x^5-1=1$;
15) $(x-2)(x^3-7)=x-2$ и $x^3-7=1$;
16) $x^4=9$ и $x^2=3$;
17) $\sqrt{x-1}=1-x$ и $x-1=(1-x)^2$.

Контрольные вопросы: Понятие равносильные уравнения?

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 13.№71

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 47
Основные приемы решения уравнений

Цель урока: Проверить усвоение учащимися темы ««Решение квадратных уравнений».

Ход урока.

1. Организационный момент.

2. Устная работа, повторение основных понятий.

Назовите вид квадратного уравнения и его коэффициенты:

1) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

2) $11x^2 - 49 = 0$;

3) $5x – x^2 = 0$;

4) $3x^2 – 7x - 2 = 0$;

5) $6x^2 = 0$;

6) $x - 6 – 2x^2 = 0$.

3. Не решая уравнения, найти сумму квадратов его корней

За верный ответ 2 балла

1) $x^2 - 5x - 7 = 0$; $(x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.)$ 1)39.

2) $x^2 + 3x – 6 = 0$. 2)21.

4. Повторение темы «Редактор формул в текстовом редакторе WORD» в процессе устной работу. На экран по ходу беседы проецируются вид панели задач, панели инструментов.

5. Постановка задачи по теме «Редактор формул в текстовом редакторе WORD». Текст задания проецируется на экран.

6.Решить квадратное уравнение различными способами и записать решение с помощью средств текстового редактора WORD.

Учащимся предлагаются карточки с заданиями трёх уровней. Дети должны решить по одному уравнению на каждый способ решения квадратных уравнений, уровень задания выбирается ребёнком самостоятельно, при этом учащийся может выбрать различные уровни сложности для различных способов решения квадратных уравнений.

	Способ решения	3 балла	2балла	1 балл
1	С помощью формулы корней квадратного уравнения.	$(x + 4)^2 = 3x + 40$	$9x^2 - 30x + 25 = 0$	$3x^2 - 7x + 4 = 0$
2	Выделением квадрата двучлена.	$x^2 + 14x - 15 = 0$.	$3x^2 + 30x + 75 = 0$	$x^2 + 18x + 81 = 0$.
3	С помощью следствий из теоремы Виета.	$73x^2 + 19x - 54 = 0$.	$16x^2 - 14x - 2 = 0$.	$x^2 + 14x - 15 = 0$.
4	С помощью формулы корней квадратного уравнения для чётного второго коэффициента.	$3x^2 - 14x + 16 = 0$.	$x^2 + 14x - 15 = 0$.	$x^2 + 2x - 80 = 0$.

	Способ решения	3 балла	2балла	1 балл
1	С помощью формулы корней квадратного уравнения.	$(x + 4)^2 = 3x + 40$	$9x^2 - 30x + 25 = 0$	$3x^2 - 7x + 4 = 0$
		-8; 3.	$\frac{5}{3}$.	1; $\frac{4}{3}$.
2	Выделением квадрата двучлена.	$x^2 + 14x - 15 = 0$.	$3x^2 + 30x + 75 = 0$	$x^2 + 18x + 81 = 0$.
		1; -15.	-5	-9
3	С помощью следствий из теоремы Виета.	$73x^2 + 19x - 54 = 0$.	$16x^2 - 14x - 2 = 0$.	$x^2 + 14x - 15 = 0$.
		-1; $\frac{54}{73}$.	1; $-\frac{1}{8}$.	1; -15
4	С помощью формулы корней квадратного	$3x^2 - 14x + 16$	$x^2 + 14x - 15 =$	$x^2 + 2x - 80 =$

	уравнения для чётного второго коэффициента.	= 0.	0.	0.
		2; $\frac{8}{3}$.	1; -15	8; -10.

7. Дополнительное задание для учащихся, выполнивших основную работу раньше остальных.

За верный ответ 2 балла

Решить квадратные уравнения с помощью следствий из теоремы Виета и в таблицу ответов поставить под номером уравнения букву, соответствующую ответу данного уравнения.

Е	М	Л	Р	О	Д	Ц	О
-1; -16	1; 9	-4,5; 1	1; -16	1; -3,8	-15; 1	-1; -13	4,25; 1

1) $x^2 -10x + 9 = 0$.

2) $5x^2 +14x - 19 = 0$.

3) $2x^2 +7x - 9 = 0$.

4) $4x^2 -21x + 17 = 0$.

5) $x^2 +14x - 15 = 0$.

6) $x^2 +17x + 16 = 0$.

7) $x^2 +14x + 13 = 0$.

8) $-x^2 +14x + 15 = 0$.

1	2	3	4	5	6	7	8
М	О	Л	О	Д	Е	Ц	

Контрольные вопросы:

1. Какие виды квадратных уравнений вы знаете?
2. Дайте определение полного квадратного уравнения.
3. Какое квадратное уравнение называется приведенным?
4. Какое квадратное уравнение называется неполным?
5. Какие способы решения квадратных уравнений вы знаете?
6. От чего зависит наличие действительных корней квадратного уравнения?
7. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
8. Как вычислить дискриминант?
9. Назовите формулу корней квадратного уравнения.
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как называются числа a, b, c.

12.Сформулируйте следствия из теоремы Виета.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 №185 а

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 48

Решение систем уравнений

Цель: отработать навыки решения систем линейных уравнений с помощью формул Крамера и методом Гаусса.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал. Система *линейных* уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

Числа a_{ij}, $i = 1,2,3,\ldots,m;\quad j = 1,2,3,\ldots,n$ – это коэффициенты системы, b_j $j=1,2,\ldots m$ – свободные члены системы.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной,* если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система называется *неоднородной*.

Решить систему (1.1) – значит найти набор чисел $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, которые обращают каждое уравнение системы (1.1) в верное числовое тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной* **.**

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении из уравнений системы неизвестных (прямой ход).Обратный ход заключается в нахождении одной из неизвестных из последнего уравнения приведенной системы, а затем из второго уравнения второй переменной и т.д.

Если система совместна, то единственное решение системы можно найти по **формулам Крамера:** $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$ **;** $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$ **;** $z=\frac{\Delta z}{\Delta}$- где Δ – главный определитель, Δx, Δy, Δz-вспомогательные определители, в которых соответствующие столбцы заменены на столбец свободных членов.

Задача . Решить систему методом Гаусса и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение: Решим систему **методом Гаусса**, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ \quad\quad -3x_3 = -15 \end{cases}$$

Находим $x_3 = 5$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

Решим систему **методом Крамера.**

Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \blacktriangle$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-2+5-1+10-6=12 \neq 0 \text{ -}$$

При решении всеми методами одной и той же системы, мы получим один ответ.

Задания для выполнения самостоятельной работы:

1.Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 4x+3y=6. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+4y+2Z=8, \\ 2x-y-3Z=6, \\ x+5y+Z=0. \end{cases}$

2. Решить систему методом Гаусса:

$\begin{cases} x+2y+3Z=1, \\ 3x+2y+Z=-1, \\ 2x+3y+Z=-2. \end{cases}$

3. Решить систему любым из 3 способов $\begin{cases} 2x+y+Z=1, \\ x+\quad 2Z=2, \\ 3x+y+2Z=3. \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Решение уравнений систем **методом Крамера.**

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- 5 №185 а

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки:

значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 49
Преобразование уравнений

Цель: отработать навыки вычисления логарифмов, преобразования простейших логарифмических выражений, решения простейших логарифмических уравнений.

Порядок выполнения работы.

3. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
4. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

8. Теоретический материал.

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b (числа **b, a – положительные, a≠ 1).**

Если $a^c = b$,то $\log_a b = c$

$a^{\log_a b} = b$ ⟶ основное логарифмическое тождество

Свойства логарифмов справедливы для логарифмов по любому основанию(а >0 ; а≠ 1**):**

1.$\log_a 1=0$

2.$\log_a a=1$

3. $\log_a a^k=k$

4. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$

5. $\log_a(x/y)=\log_a x - \log_a y$

6. $\log_a b^k=k\cdot\log_a b$

Основание логарифма и число под знаком логарифма можно поменять местами по формуле:

$\log_a b=1/\log_b a$

Общая формула перехода к логарифму по другому основанию.

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

Логарифм по основанию a^n.

$\log_{a^n} b = (1/n) \cdot \log_a b$

Логарифм числа **b** по основанию **a^n** равен произведению дроби **1/n** на логарифм числа **b** по основанию **a**.

Примеры решения

Задания для самостоятельной работы:

Пример 1. Вычислите $\log_2 8$

Решение: $\log_2 8 = 3$.(т.к. $2^3 = 8$)

Пример2. Вычислите $\log_5 25$.

Решение: $\log_5 25 = 2$

Пример 3. Вычислите $\log_6 \frac{1}{36}$

Решение.$\log_6 \frac{1}{36} = -2$ (т.к. $6^{-2} = \frac{1}{36}$)

1.Вычислите

значение выражения

а) $\log_5 \frac{1}{25}$

б) $\log_3 81$

в) $\log_8 12 + \log_8 \frac{1}{3}$

г) $\log_3 66 - \log_3 22$

д) $\log_{98} 1$

е) $\frac{\log_4 25}{\log_4 5}$

ж) $(2\log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2\log_{12} 6 - \log_{12} 3)$

з) $5^{\log_5 8 + 1}$

и) $\log_2(-2)$

2. Найдите x, если

а) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{8}) = x$

б) $\log_x 0{,}125 = -3$

в) $\log_{16} x = -\frac{3}{4}$

г) $\log_6 x = -2$

д) $\log_3 x = 2\log_3 12 - \log_3 6 + \log_3 5$

3.Найдите $\log_a x$, если $\log_a в = 4, \log_a c = 2$

$X = \frac{a^2 в}{c}$; $x = a^2\sqrt{в}$

Контрольные вопросы:

1. Метод решения логарифмических уравнений.

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 4

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

Практическое занятие № 50
Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств

Цель: Использовать монотонности функций при решении уравнений и неравенств.

Теория

Использовать монотонности функций при решении уравнений и неравенств:

1. Строго монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз.
2. Если одна функция возрастает, а другая убывает на одном и том же промежутке, то графики их, либо только один раз пересекутся, либо вообще не пересекутся, а это означает, что уравнение F(x)=G(x) имеет не более одного решения.
3. Если на некотором промежутке одна из функций убывает (возрастает), а другая принимает постоянные значения, то уравнение F(x)=G(x) либо имеет единственный корень, либо не имеет корней.

Пример

Решите уравнение: $x^3=2-x$

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=x^3$ и $g(x)=2-x$.

Функция f(x) возрастает на всей области определения, а функция g(x) убывает на области определения. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня.

Подбором находим, что x=1. Проверкой убеждаемся, что x=1 действительно корень уравнения.

Проверка: $1^3=2-1$; 1=1.

Ответ: 1.

Использование четности функции

Функция f (x) называется четной, если для любого $x \in D$ выполняется равенство: $f(-x)=f(x)$.

Исследование функций на четность облегчается следующими утверждениями:

·Сумма четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией.

·Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.

·Произведение четной и нечетной функции является нечетной функцией.

·Если функция f четна (нечетна), то и функция 1*f*четна (нечетна).

Пример

Может ли при каком-нибудь значении a уравнение: 2*x*8−3*ax*6+4*x*4−*ax*2=5 иметь 5 корней?

Решение.

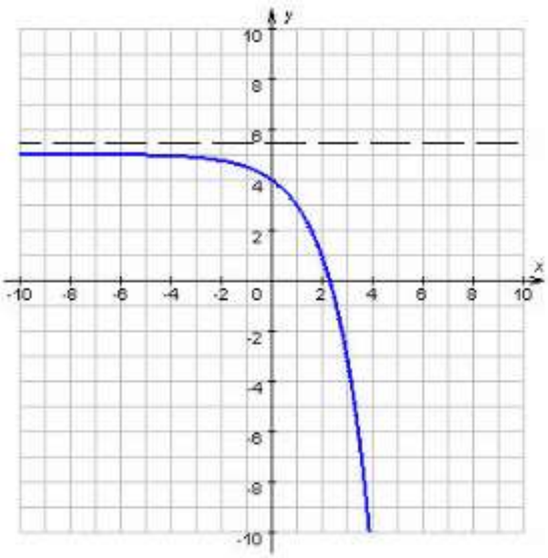
Обозначим *f*(*x*)=2*x*8−3*ax*6+4*x*4−*ax*2=5, где f(x) – четная функция. Если x0 – корень данного уравнения, то (-x0) – тоже корень. Значение x=0 не является корнем уравнения. Следовательно, число корней у этого уравнения при любом действительном a четно, поэтому 5 корней оно иметь не может.

Использование области определения функции

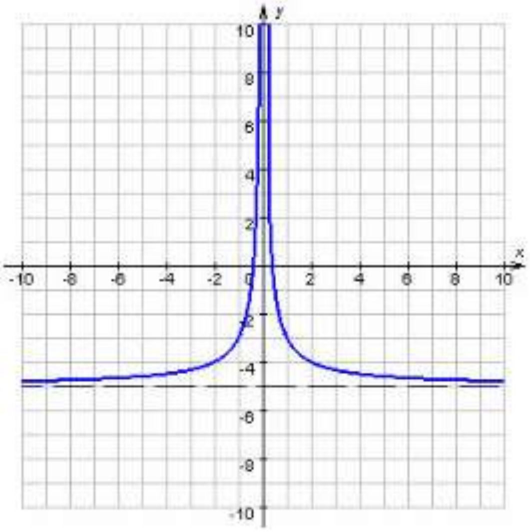
Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента x (переменной x), при которых функция определена. Область определения иногда еще называют областью допустимых значений функции. Для нахождения функции нужно проанализировать данное соответствие и установить встречающиеся запретные операции (деление на нуль, возведение в рациональную степень отрицательного числа, логарифмические операции над отрицательными числами и т. п.). Иногда знание позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения (или неравенства) непосредственной подстановкой чисел.

Использование ограниченности функции. При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль.

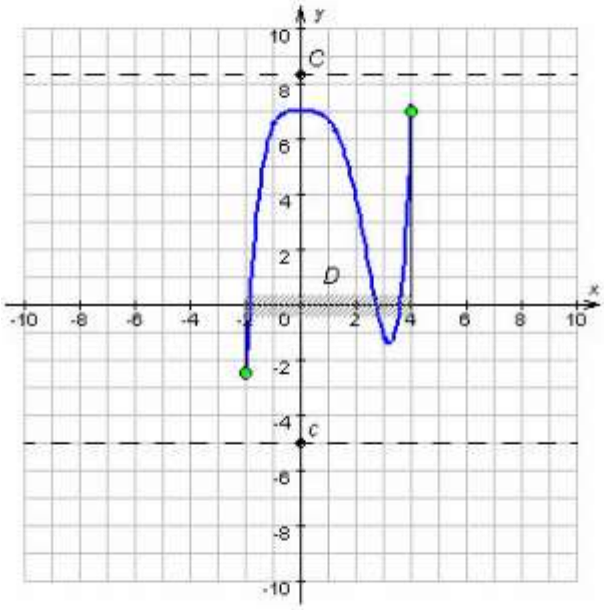
Если существует такое число C, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant C$, то функция f называется ограниченной сверху на множестве D.



Если существует такое число c, что для любого выполняется неравенство $f(x) \geq c$, то функция f называется ограниченной снизу на множестве D.



Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется ограниченной на множестве D. Геометрически ограниченность функции f на множестве D означает, что график функции y=f(x) при лежит в полосе c⩽f(x)⩽C.



Пример

Решите уравнение sin(x^3 +2x^2 +1)=x^2+2x+2

Решение.

Для любого действительного числа x имеем sin(x3+2x2+1)⩽1,x2+2x+2=(x+1)2+1⩾1.

Поскольку для любого значения x левая часть уравнения не превосходит единицы, а правая часть всегда не меньше единицы, то данное уравнение может иметь решение только при x=-1.

При x=-1 имеем:

x2+2x+2=1;sin(−1+2+1)=sin2≠1;

т.е. уравнение корней не имеет.

Вариант 3

1. Какое неравенство не существует при x = - 6:

1) $\lg(x+1) > -x$;

2) $2x - 1 \le \dfrac{1}{x}$;

3) $2^x \ge x^3$?

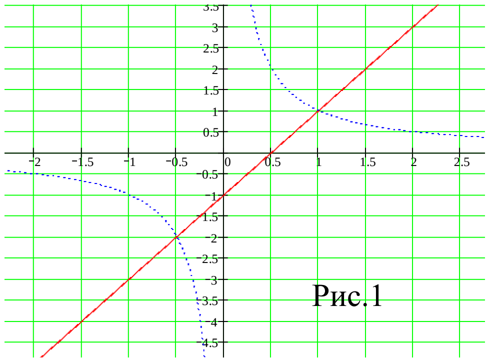


Рис.1

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $2^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;1]$; 3) (-0,5;0); 4) (1;2).

3. Выберите решение неравенства $2x - 1 \le \dfrac{1}{x}$:

1) $(-\infty;-05] \cup [1;+\infty)$;

2) $[1;+\infty)$;

3) $(-\infty;-05] \cup (0;1]$;

4) $(-\infty;-05]$.

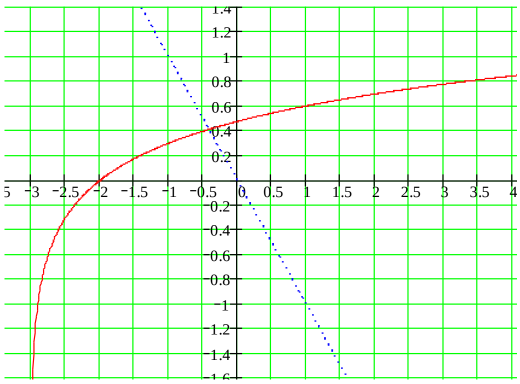


Рис.2

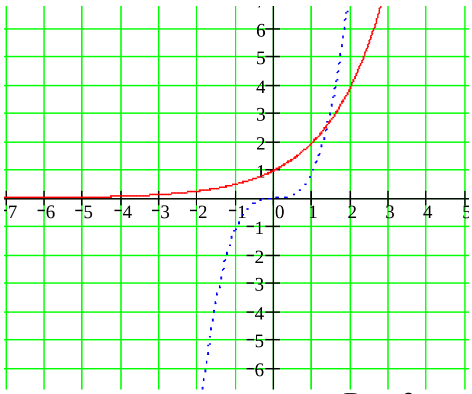


Рис.3

4. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg(x+1) = -x$? (укажите в бланке номер рисунка).

5. Укажите приближенное значение корня уравнения $\lg(x+1) = -x$:

1) -2; 2) 0,4; 3) -0,3.

Вариант 4

1. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;0]$; 3) (0,5;1,5); 4) (0;0,5).

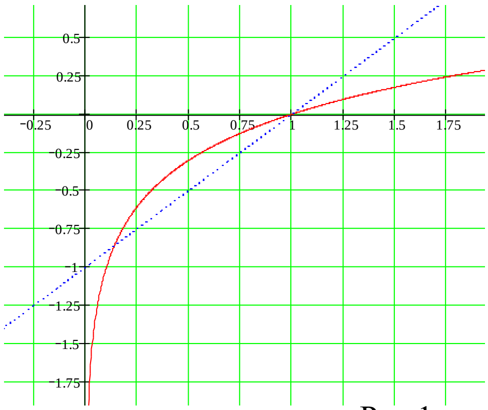


Рис.1

2. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg x = x - 1$? (укажите в бланке номер рисунка).

3. Какое неравенство не существует при x = - 2:

1) $x^2 < \dfrac{2}{x}$;

2) $\lg x \le x - 1$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \ge x^3$?

4. Выберите решение неравенства $x^2 \ge \dfrac{2}{x}$:

1) $(-\infty;-05]$;

2) $[1{,}3;+\infty)$;

3) $(-\infty;0] \cup [1{,}3;+\infty)$;

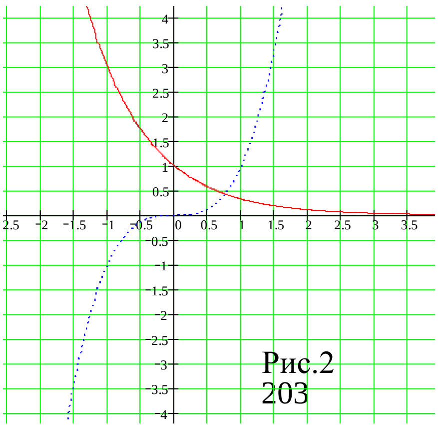


Рис.2

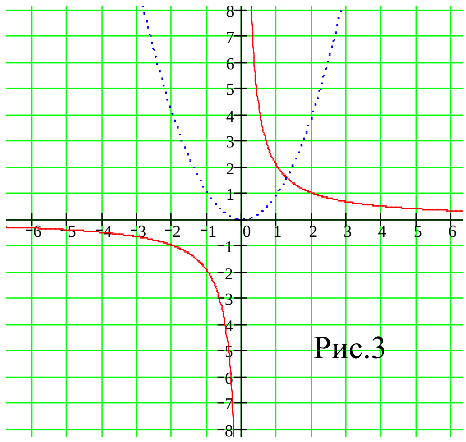


Рис.3

4) $(-\infty;0)\cup[1{,}3;+\infty)$.

5. Укажите значение наибольшего корня уравнения $\lg x = x-1$:

1) 0,15; 2) 0; 3)1.

Вариант 1

1. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg(x+1) = -x$? (укажите в бланке номер рисунка).

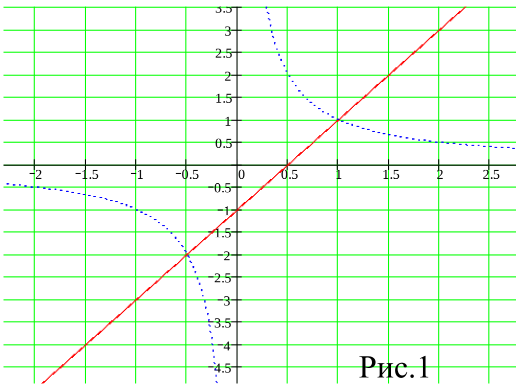


Рис.1

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $2^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;1]$; 3) (-0,5;0); 4) (1;2).

3. Выберите решение неравенства $2x-1 \le \frac{1}{x}$:

1) $(-\infty;-05]\cup[1;+\infty)$;

2) $[1;+\infty)$;

3) $(-\infty;-05]\cup(0;1]$;

4) $(-\infty;-05]$.

4. Какое неравенство не существует при x = - 6.

1) $\lg(x+1) > -x$;

2) $2x-1 \le \frac{1}{x}$;

3) $2^x \ge x^3$?

5. Укажите приближенное значение корня уравнения $\lg(x+1) = -x$:

1) -2; 2) 0,4; 3) -0,3.

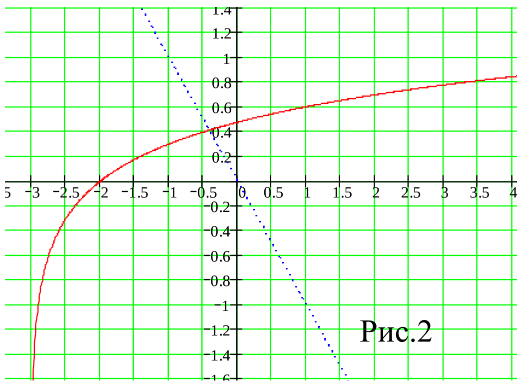


Рис.2

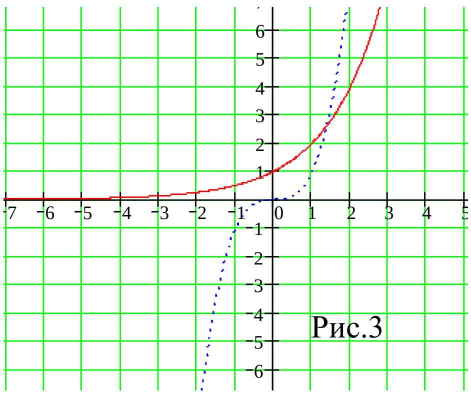


Рис.3

Вариант 2

1. Какой рисунок соответствует уравнению $\lg x = x-1$? (укажите в бланке номер рисунка).

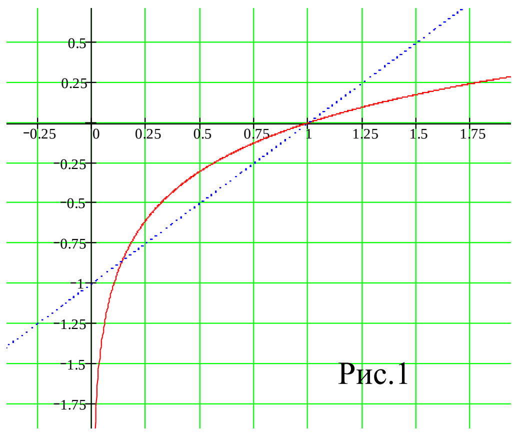


Рис.1

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$:

1) (2;3); 2) $[-1;0]$; 3) (0,5;1,5); 4) (0;0,5).

3. Выберите решение неравенства $x^2 \ge \frac{2}{x}$:

1) $(-\infty;-05]$;

2) $[1{,}3;+\infty)$;

3) $(-\infty;0]\cup[1{,}3;+\infty)$;

4) $(-\infty;0)\cup[1,3;+\infty)$.

4. Какое неравенство не существует при x = - 2.

1) $\lg x \le x-1$;

2) $x^2 < \dfrac{2}{x}$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \ge x^3$?

5. Укажите значение наибольшего корня уравнения $\lg x = x-1$:

1) 0,15;   2) 0;   3)1.

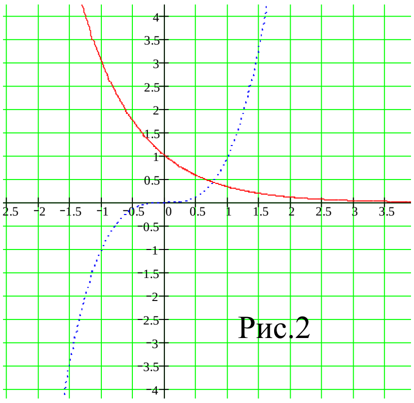


Рис.2

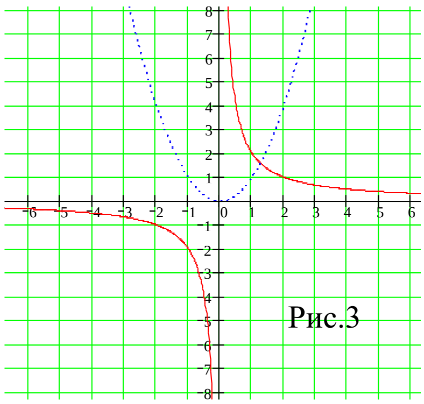


Рис.3

Домашнее задание: Башмаков М.И. «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»- глава 5 № 75 (А.Б)

Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотечная система Znanium [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://znanium.com/ (дата обращения 16.09.2021г.)

Сайты в сети Интернет:

1.Онлайн библиотека [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.vbbooks.ru.

2.Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс] – Режим доступа: http: //www.intuit.ru.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности, правильно ответил на контрольные вопросы, грамотно сформулировал вывод.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся выполнил требования к оценке «отлично», но допустил ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, не сформулировал вывод.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если работа выполнена не полностью и, если в ходе работы были допущены следующие ошибки: значительные ошибки в решении задач, неаккуратно оформил содержание работы, неверно ответил на контрольные вопросы, не сформулировал вывод.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не подготовился к выполнению данной работы, полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью, показывал плохие знания теоретического материала, руководство и помощь со стороны преподавателя и хорошо подготовленных обучающихся неэффективны по причине плохой подготовки

КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Результаты обучения[2]	Критерии оценки	Методы оценки
ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес. ОК 2. Организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения, определенных руководителем. ОК 3. Анализировать рабочую ситуацию, осуществлять текущий и итоговый контроль, оценку и коррекцию собственной деятельности, нести ответственность за результаты своей работы. ОК 4. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач. ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности. ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами. ОК 7. Соблюдать правила реализации товаров в соответствии с действующими санитарными нормами и правилами,	демонстрация интереса к будущей профессии; оценка собственного продвижения, личностного развития; положительная динамика в организации собственной учебной деятельности по результатам самооценки, самоанализа и коррекции ее результатов; ответственность за результат учебной деятельности и подготовки к профессиональной деятельности; проявление высокопрофессиональной трудовой активности; участие в исследовательской и проектной работе; участие в конкурсах профессионального мастерства, олимпиадах по профессии, викторинах, в предметных неделях; конструктивное взаимодействие в учебном коллективе/бригаде; демонстрация навыков межличностного делового общения, социального имиджа; проявление правовой активности и навыков правомерного поведения, уважения к Закону; отсутствие фактов проявления идеологии	Участие в конкурсах,олимпиадах, выполнение индивидуальных проектов.

[2] В ходе оценивания могут быть учтены личностные результаты

стандартами и Правилами продажи товаров. ОК.8 Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей)	терроризма и экстремизма среди обучающихся; отсутствие социальных конфликтов среди обучающихся, основанных на межнациональной, межрелигиозной почве; участие в реализации просветительских программ, поисковых, археологических, военно-исторических, краеведческих отрядах и молодежных объединениях; добровольческие инициативы по поддержки инвалидов и престарелых граждан; проявление экологической культуры, бережного отношения к родной земле, природным богатствам России и мира; демонстрация умений и навыков разумного природопользования, нетерпимого отношения к действиям, приносящим вред экологии; демонстрация навыков здорового образа жизни и высокий уровень культуры здоровья обучающихся; проявление культуры потребления информации, умений и навыков пользования компьютерной техникой, навыков отбора и критического анализа информации, умения ориентироваться в информационном пространстве; участие в конкурсах профессионального мастерства и в командных проектах;	

	проявление экономической и финансовой культуры, экономической грамотности, а также собственной адекватной позиции по отношению к социально-экономической действительности;	
ЛР 01. Осознающий себя гражданином и защитником великой страны. ЛР 05. Сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности. ЛР 06 Толерантное сознание и поведение в поликультурном мире, готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения, способность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам и другим негативным социальным явлениям. ЛР 07. Осознающий приоритетную ценность личности человека;	проявление мировоззренческих установок на готовность молодых людей к работе на благо Отечества; готовность к общению и взаимодействию с людьми самого разного статуса, этнической, религиозной принадлежности и в многообразных обстоятельствах; сформированность гражданской позиции; участие в волонтерском движении; соблюдение этических норм общения при взаимодействии с обучающимися, преподавателями, мастерами и руководителями практики;	Участие в конкурсах,олимпиадах, выполнение индивидуальных проектов.

уважающий собственную и чужую уникальность в различных ситуациях, во всех формах и видах деятельности. ЛР 08 Нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей. ЛР 09 Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности. ЛР 10 Эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, общественных отношений. ЛР 11. Проявляющий уважение к эстетическим ценностям, обладающий основами эстетической культуры.		
• личностных: – сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики; – понимание значимости математики для научно-технического прогресса,	Знание материала в общих чертах, математических методов решения практических задач; применение математических методов для решения практических задач.	Оценка за выполнение работы на практических занятиях №1-40 Оценка за выполнение самостоятельной (внеаудиторной) работы Наблюдение и оценка выполнения

сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; – развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; – овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки; – готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности; – готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности; – готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в		практических работ по разделу 1 Устный (письменный) опрос по темам: 1.1 Оценка выполнения заданий экзамена Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 1 Устный (письменный) опрос по темам: 1.1 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 6 Устный (письменный) опрос по темам: 6.3 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 6 Устный (письменный) опрос по темам: 6.1, 6.2,6.2 Наблюдение и оценка выполнения практически работ по разделу 6 Устный (письменный) опрос по темам: 6.1,6.2,6.3 Проверка задач самостоятельной работы по разделу 6 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по

образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности; − отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем; − умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях; − умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты; − владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных		разделу 6 Устный (письменный) опрос по темам: 6.1, 6.2, 6.3 Наблюдение и оценка выполнения практически работ по разделу 6 Устный (письменный) опрос по темам: 6.1, 6.2, 6.3 Контрольная работа по разделу 8 Проверка задач самостоятельной работы по разделу 8 Контрольная работа по разделу 8 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 8 Устный (письменный) опрос по темам: 8.2, 8.3 Контрольная работа по разделу 8 Проверка задач самостоятельной работы по разделу 8 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 9 Устный (письменный) опрос по темам: 9.1

методов познания; – готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников; – владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства; – владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения; – целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;		
• предметные: – сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;	Знание материала в общих чертах, математических методов решения практических задач; применение математических методов для решения	Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 1 Устный (письменный) опрос по темам: 1.1 Контрольная работа по

сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; – владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; – владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; – сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей; – владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;	практических задач.	разделу 1 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 9 Устный (письменный) опрос по темам: 9.1 Контрольная работа по разделу 5 Проверка задач самостоятельной работы по разделу 5 Проверка задач самостоятельной работы по разделу 11 Проверка задач самостоятельной работы по разделу 11 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 11 Наблюдение и оценка выполнения практически работ по разделу 11 Устный (письменный) опрос по темам: 11.1, 11.2, 11.3, 11.4 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 10 Устный (письменный) опрос по темам: 10.1, 10.2, 10.3 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по

сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; – сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; – владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.		разделу 10 Устный (письменный) опрос по темам: 10.1, 10.2, 10.3 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 2 Устный (письменный) опрос по темам: 2.1 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 2 Устный (письменный) опрос по темам: 2.1 Наблюдение и оценка выполнения практических работ по разделу 7 Устный (письменный) опрос по темам: 7.1, 7.2, 7.3